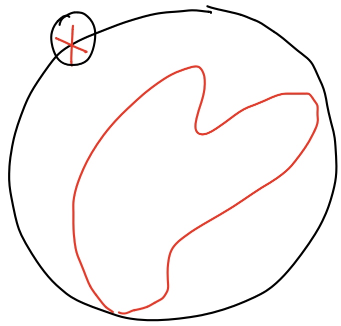
APPLICAZIONI DEL TEOREMA DI VAN KAMPEN

TEOREMA Per $n \geq 2$ $\pi_1(S^n) = 1$



DIMOSTRAZIONE

SIANO S e N DUE PUNTI DISTINTI DI S^n

E CONSIDERIAMO $A = S^n \setminus S \simeq \mathbb{R}^n$

$B = S^n \setminus N \simeq \mathbb{R}^n$

$A \cap B$ è connesso. $x_0 \in A \cap B$ $X = S^n$

APPLICHIAMO L'OSSERVAZIONE CHE

$\pi_1(S^n, x_0)$ È GENERATO DALL'IMMAGINE

DI $\underset{\substack{\| \\ 1}}{\pi_1(A, x_0)}$ E DI $\underset{\substack{\| \\ 1}}{\pi_1(B, x_0)}$

PERCHÉ $A \simeq B \simeq \mathbb{R}^n$

QUINDI $\pi_1(S^n, x_0) = 1$ $n \geq 2$.

#

IL TEOREMA DI VAN KAMPEN DETERMINA $\pi_1(X, x_0)$

DEFINIZIONE

1) Siano G e H e L tre gruppi e siano $\alpha : G \longrightarrow L$ e $\beta : H \longrightarrow L$ due morfismi di gruppi.

Dico che L è il prodotto libero di G e H se $\forall\, M$ gruppo $\forall\, \varphi : G \longrightarrow M$ di gruppi $\forall\, \psi : H \longrightarrow M$ di gruppi $\exists_1\, \chi : L \longrightarrow M$ di gruppi tale che

$$\varphi = \chi \circ \alpha \qquad \psi = \chi \circ \beta$$

$$\begin{tikzcd}
 & G \arrow[d, "\alpha"] \arrow[ddr, bend left, "\varphi"] & \\
H \arrow[r, "\beta"] \arrow[drr, bend right, "\psi"'] & L \arrow[dr, dashed, "\chi"] & \\
 & & M
\end{tikzcd}$$

2) SIANO K, H, G, L dei gruppi

e siano $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ dei morfismi di gruppi

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\delta"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & G \arrow[d, "\alpha"] \\ H \arrow[r, "\beta"'] & L \end{tikzcd}$$

con $\alpha \circ \gamma = \beta \circ \delta$.

Allora dico che L è il prodotto libero di G e H sopra K se $\forall\, \varphi : G \to \Pi$ $\forall\, \psi : H \to \Pi$

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\delta"'] & G \arrow[d, "\alpha"] \arrow[ddr, bend left, "\varphi"] & \\ H \arrow[r, "\beta"'] \arrow[drr, bend right, "\psi"'] & L \arrow[dr, dashed, "\chi"] & \\ & & \Pi \end{tikzcd}$$

tali: $\boxed{\varphi \circ \gamma = \psi \circ \delta}$ esiste un unico $\chi : L \to \Pi$

tale che $\chi \circ \alpha = \varphi$ $\quad \chi \circ \beta = \psi$

OSS 1 il caso del prodotto libero di G e H si ottiene dalla seconda definizione per $K = 1$

OSS. 2 IL PRODOTTO LIBERO DI G e H SOPRA K È UNIVOCAMENTE DETERMINATO A MENO DI ISOMORFISMO UNICO.

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\delta"'] & G \arrow[dr, "\alpha'"] \arrow[dd, "\alpha"] & \\
H \arrow[rr, "\beta'"] \arrow[dr, "\beta"'] & & L' \\
& L \arrow[ur, dashed, "\chi"'] &
\end{tikzcd}$$

SIANO L e L' DUE PRODOTTI LIBERI DI G e H SOPRA K.

Se prendiamo $M = L'$ $\quad \varphi = \alpha'$ $\quad \psi = \beta'$

DAL FATTO CHE L È IL PRODOTTO LIBERO DI G E H SOPRA K $\exists_1$ χ TALE CHE

$$\boxed{\chi \circ \beta = \beta' \qquad \chi \circ \alpha = \alpha'}$$

ANALOGAMENTE $\exists_1\ \chi' : L' \longrightarrow L$ TALE CHE

$$\chi' \circ \beta' = \beta \qquad \chi' \circ \alpha' = \alpha$$

DIMOSTRO $\underline{\chi' \circ \chi} = Id_L$ e $\chi \circ \chi' = Id_{L'}$

$$\boxed{\begin{aligned} \underbrace{\chi' \circ \chi} \circ \alpha &= \chi' \circ \alpha' = \alpha \\ \underbrace{\chi' \circ \chi} \circ \beta &= \chi' \circ \beta' = \beta \end{aligned}}$$

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\delta"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & G \arrow[d, "\alpha"] \arrow[ddr, bend left, "\alpha"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \\
H \arrow[r, "\beta"] \arrow[drr, bend right, "\beta"'] & L \arrow[dr, "\chi' \circ \chi"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\
& & L
\end{tikzcd}$$

OSSERVIAMO CHE Id HA LA STESSA PROPRIETÀ

$$Id_L \circ \alpha = \alpha \qquad Id_L \circ \beta = \beta .$$

PER UNICITÀ $\chi' \circ \chi = Id_L$

ANALOGAMENTE $\chi \circ \chi' = Id_{L'}$

<u>NOTAZIONE</u>

- IL PRODOTTO LIBERO DI G E H SI INDICA CON $G * H$ ///
- IL PRODOTTO LIBERO DI G E H SOPRA K SI INDICA CON $G \underset{K}{*} H$

TEOREMA DI VAN KAMPEN

$$\pi_1(X, x_0) = \pi_1(A, x_0) \underset{\pi_1(A\cap B, x_0)}{*} \pi_1(B, x_0)$$

COSTRUZIONE DEL PRODOTTO LIBERO

COSTRUISCO $G * H$

Sia P l'insieme delle liste finite di elementi di G e H. Cioè un elemento di P è o la lista $\emptyset$ o una successione finita $x_1 \, x_2 \, \dots \, x_k$ con $x_i \in G \cup H$.

Su P definiamo un prodotto $\bullet$

$$\emptyset \bullet \emptyset = \emptyset$$

$$\emptyset \bullet x_1 \quad x_n = x_1 \quad x_n = x_1 \dots x_n \bullet \emptyset$$

$$x_1 \quad x_n \bullet y_1 \quad y_m = x_1 \dots x_n \, y_1 \dots y_m$$

$\bullet$ è associativo e ha un elemento neutro che è $\emptyset$.

DEFINISCO $L = \mathcal{P}/\sim$

$\sim$ è la relazione di equivalenza generata dalle relazioni:

- $\emptyset \sim 1_G \sim 1_H$

- $x_1 \dots x_{h-1} \underbrace{\overbrace{x_h \, x_{h+1}}} x_{h+2} \dots x_N \sim x_1 \dots x_{h-1} \underline{y} \, x_{h+2} \dots x_N$

  con $x_h, x_{h+1} \in G$ e $y = x_h \cdot x_{h+1}$ in G

- La relazione analoga con H al posto di G.

- $x_1 \dots x_{h-1} 1_G x_{h+1} \dots x_N = x_1 \dots x_N = x_1 \dots x_{h-1} 1_H x_{h+1} \dots x_N$

DICO CHE p e $q \in \mathcal{P}$ sono equivalenti se esiste una successione di parole $p_1 \dots p_N$

$$p = p_1 \sim p_2 \sim \dots \sim p_N = q$$

dove questa $\sim$ solo una delle 3 della lista precedente.

OSSERVAZIONE

Se $p \sim p'$ allora $p \cdot q \sim p' \cdot q$

BASTA FARE IL CASO IN CUI

$p' \sim p$ e $\sim$ è una delle 3 relazioni
che compaiono nelle liste.

FACCIAMO IL CASO DELLA SECONDA
TIPO DI RELAZIONE

$$p = x_1 \dots x_{h-1}\, x_h\, x_{h+1}\, x_{h+2} \quad x_N$$

$$p' = x_1 \dots x_{h-1} \quad y \quad x_{h+2} \quad x_N$$

[con $x_h\, x_{h+1} \in G$ $\quad y = x_h x_{h+1}$ prodotto in G

$$p \circ q = x_1 \dots x_{h-1}\, \underbrace{x_h\, x_{h+1}}\, x_{h+2} \dots x_n \dots q \dots$$

$$\wr$$

$$p' \circ q = x_1 \dots\dots x_{h-1} \,\underbrace{y}\, x_{h+2} \quad x_n \dots q \dots$$

$p \circ q \sim p' \circ q$ per lo stesso motivo

ESERCIZIO IL CASO $\quad p = \emptyset \quad p' = 1_G$
(due passaggi).

<u>OSSERVAZIONE</u> Se $q \sim q'$ allora $p \circ q \sim p \circ q'$

QUINDI POSSO DEFINIRE UN PRODOTTO IN L.

$$[\underline{p}] \circ [\underline{q}] = [p \circ q]$$

$$1_L = [\emptyset]$$

L ha un prodotto associativo.
ha un'unità 1_L

L è un gruppo.

$$[x_1 \quad x_n] \cdot [x_n^{-1} \quad x_1^{-1}] =$$

$$= [x_1 \quad \underbrace{x_n \; x_n^{-1}} \quad x_1^{-1}]$$

$$= [x_1 \quad x_{n-1} \; 1_G \; x_{n-1}^{-1} \cdots x_1^{-1}) =$$

$$= [x_1 \quad x_{n-1} \quad x_{n-1}^{-1} \quad x_1^{-1}]$$

e così via $\cdots [1_H]$ o sono e $[1_G]$

$$\begin{array}{ccc} [1_H] & & [1_G] \\ \| & & \| \\ [\emptyset] = 1_L & & [\emptyset] = 1_L. \end{array}$$

Definisco $\alpha : G \longrightarrow L \qquad \alpha(g) = [g]$

$\beta : H \longrightarrow L \qquad \beta(h) = [h]$

LA DEFINIZIONE DI $\sim$

$$\alpha(g_1 g_2) = [\underbrace{(g_1 g_2)}_{\overset{\|}{g}}] = [\underbrace{g_1 \quad g_2}_{\text{lista}}] = [g_1] \cdot [g_2]$$

$$\| $$

$$\alpha(g_1)\, \alpha(g_2)$$

α e β sono morfismi di gruppi.
VERIFICO CHE $L = G * H$

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[ddr, bend left, "\varphi"] & \\ H \arrow[r, "\beta"] \arrow[drr, bend right, "\psi"'] & L \arrow[dr, dashed, "\chi"] & \\ & & M \end{tikzcd}$$

DEFINISCO

$$\tilde{\chi} : P \longrightarrow \Pi \qquad \tilde{\chi}(\emptyset) = 1_\Pi$$

$$\tilde{\chi}(x_1 \dots\dots x_k) = \varphi(x_1)\,\psi(x_2) \dots\dots$$

dove applico φ a $x_i \in G$

applico ψ a $x_i \in H$

DEVO VERIFICARE CHE

1) $\tilde{\chi}$ passa al quoziente

$p \sim p'$ allora $\tilde{\chi}(p) = \tilde{\chi}(p')$

2) su L definisce un morfismo χ con le proprietà richieste.

1) $p = \underline{x_1 \dots x_{k-1}}\ x_k\ x_{k+1}\ x_{k+2} \dots x_N$ $\qquad x_{k-1}, x_k \in G$

$p' = \underline{x_1 \quad x_{k-1}}\quad y \quad x_{k+2} \quad x_N$ $\qquad y = x_{k-1}x_k$ prodotto in G.

$$\tilde{\chi}(p) = \tilde{\chi}(x_1 \dots x_{k-1})\,\varphi(x_k)\,\varphi(x_{k+1})\,\tilde{\chi}(x_{k+2} \dots x_N)$$

$$\tilde{\chi}(p') = \tilde{\chi}(x_1 \dots x_{u-1}) \quad \varphi(y) \quad \tilde{\chi}(x_{u+2} \dots x_N)$$

poiché φ è di gruppi $\varphi(y) = \varphi(x_u) \cdot \varphi(x_{u+1})$.

DEFINISCO $\chi([p]) = \tilde{\chi}(p)$

DEFINISCE $\chi : L \longrightarrow M$.

2) $\underline{\chi \circ \alpha = \varphi}$ $\quad \chi \circ \beta = \psi$ $\quad$ e $\quad \chi$ è di gruppi.

VERIFICO $\chi \circ \alpha = \varphi$

$$\chi \circ \alpha(g) = \chi([g]) = \varphi(g)$$

$$\boxed{\text{COSTRUZIONE DI } G \underset{K}{*} H}$$

Se G è un gruppo e $X \subset G$

il sottogruppo normale generato da X

$$\underset{\text{sgr Normale}}{\langle X \rangle} = \bigcap_{\substack{N \triangleleft G \\ X \subset N}} N$$

TORNIAMO ALLA COSTRUZIONE DI $\boxed{G \underset{K}{*} H}$

$$
\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\delta"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & G \arrow[d, "\alpha_1"] \\
H \arrow[r, "\beta_1"'] & G * H
\end{tikzcd}
$$

Sia $L_1 = G * H$ $\qquad \alpha_1 : G \longrightarrow L_1$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \beta_1 : \cancel{K}H \longrightarrow L_1$

Sia $N = \langle \underbrace{\alpha_1(\gamma(x))\, \beta_1(\delta(x))^{-1}} \rangle$ sgr normale.

DEFINISCO $\quad G \underset{K}{*} H = \dfrac{G * H}{N}$

$\pi : G * H \longrightarrow G \underset{K}{*} H \qquad \ker \pi = N.$

$\alpha : G \longrightarrow G \underset{K}{*} H \qquad \alpha = \pi \circ \alpha_1$

$\beta : H \longrightarrow G \underset{K}{*} H \qquad \beta = \pi \circ \beta_1$

$$
\begin{tikzcd}
K \arrow[rr, "\gamma"] \arrow[dd, "\delta"'] & & G \arrow[dl, "\alpha_1"'] \arrow[dd, "\alpha"] \\
& G * H \arrow[dr, "\pi"] & \\
H \arrow[ur, "\beta_1"] \arrow[rr, "\beta"'] & & \dfrac{G * H}{N}
\end{tikzcd}
$$

1° FATTO $\boxed{\alpha \circ \gamma = \beta \circ \delta}$

$$\alpha \circ \gamma (x) = \beta \circ \delta (x)$$

verifico
$$\alpha(\gamma(x)) \; \beta(\delta(x))^{-1} = 1$$

$$\pi\big(\underset{\overset{\cap}{N}}{\alpha_1(\gamma(x)) \cdot \beta_1(\delta(x))^{-1}} \big) = 1$$

2° FATTO

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[rr, "\gamma"] \arrow[dd, "\delta"'] & & G \arrow[dl, "\alpha_1"'] \arrow[dd, "\alpha"] \arrow[ddr, bend left, "\varphi"] & \\
& G * H \arrow[dr, "\pi"] \arrow[drr, dashed, "\tilde{\chi}"] & & \\
H \arrow[ur, "\beta_1"] \arrow[rr, "\beta"'] \arrow[rrr, bend right, "\psi"'] & & \frac{G * H}{N} \arrow[r, dashed, "\chi"'] & \Pi
\end{tikzcd}$$

$$\varphi \circ \gamma = \psi \circ \delta$$

$$\exists_1 \; \tilde{\chi} : G * H \longrightarrow \Pi \text{ tale che}$$

$$\varphi = \tilde{\chi} \circ \alpha_1, \qquad \psi = \tilde{\chi} \circ \beta_1$$

unicità di $\tilde{\chi}$ implica quella di χ.

per dimostrare che χ esiste devo verificare

che $\tilde{\chi}(N) = 1$ (e poi qualche teo di omom)

$\underline{\ker \tilde{\chi}} \supset N$. e $\ker \tilde{\chi}$ è sgr. norm.

basta verificare che $\ker \tilde{\chi} \supset X$

$$X = \{ \alpha_1(\gamma(x)) \, \beta_1(\delta(x))^{-1} \}_{x \in K}.$$

$$\tilde{\chi}\left(\alpha_1(\gamma(x)) \, \beta_1(\delta(x))^{-1} \right) =$$

$$= \varphi(\gamma(x)) \, \psi(\delta(x))^{-1} = 1.$$

#

CASO PARTICOLARE

Sia X un insieme finito. (finito non serve)

voglio costruire un gruppo L che ha

questa proprietà

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[rr, bend right, "\varphi"'] & L \arrow[r, dashed, "\Phi"] & M \end{tikzcd}$$

$\forall M$ e $\forall \varphi : X \longrightarrow M$ φ hom di gruppi

$\exists_1 \Phi : L \longrightarrow M$ di gruppi

con $\Phi \circ \alpha = \varphi$

L si chiama il gruppo libero generato da X.

Se $X = \{x\}$ chi è L.

$L = \mathbb{Z}$

$$\begin{tikzcd} \alpha : X \arrow[r] \arrow[dr, bend right, "\varphi"'] & \mathbb{Z} \ni n \quad 1 \arrow[d] \\ & M \ni m^n \quad m = \varphi(x) \end{tikzcd}$$

$\alpha(x) = 1$