LEZIONE 24

31/3/2021

ANALISI 2

TEOREMA (PEANO)

$f : (x_0 - a, x_0 + a) \times B_r(y_0) \to \mathbb{R}^n$ CONTINUA E LIMITATA

$\Rightarrow \exists$ SOLUZIONE DEL PB

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

DEFINITA IN $x \in I_\delta = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $\delta = \min\left\{ a, \frac{r}{M} \right\}$,

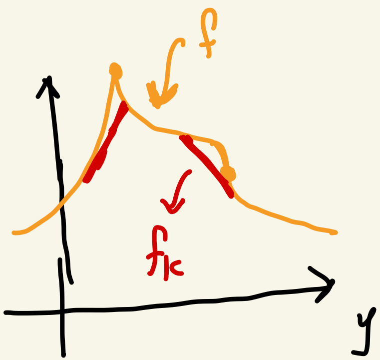
CON $M = \|f\|_\infty$.

DIM. SI APPROSSIMA f CON f_k FUNZ. LOC. LIP. IN y

AD ES. $f_k(x,y) = \inf_{z \in B_r(y_0)} \{ \underbrace{f(x,z) + k|y-z|}_{\text{K-LIP. IN } y} \} \leq f(x,y)$

$k \in \mathbb{N}$

f_k È K-LIP. IN y E $\lim_k f_k = \sup_k f_k = f$



IN ALTERNATIVA SI PUÒ USARE IL TEOREMA DI STONE-WEIERSTRASS PER CUI I POLINOMI SONO DENSI NELLE FUNZIONI CONTINUE

PER IL TEO PRECEDENTE $\exists!$ SOL. $y_k : I_{\delta_k} \to \mathbb{R}^n$ DI

$$\begin{cases} y' = f_k(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

CON $\delta_k \xrightarrow[k]{} \delta$.

y_k SONO EQUILIMITATE

$y_k' = f_k(x, y_k)$ SONO EQUILIMITATE

$\Rightarrow$ y_k SONO EQUICONTINUE $\Rightarrow$ PER ASCOLI-ARZELÀ

$\exists\, y : I_\delta \to \mathbb{R}^n$ T.C. $y_k \xrightarrow[k]{} y$ UNIF., A MENO DI SOTTOSUCC.

LE y_k VERIFICANO $\quad y_k(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f_k(s, y_k(s))\, ds$

PASSANDO AL LIMITE HO

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\, ds,$$

CIOÈ y È SOL. DEL PROBLEMA.

OSS: COME GIÀ VISTO, IN GENERALE y NON È L'UNICA SOLUZIONE

OSS: $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ $\qquad y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s,y)$

E SUPP. CHE $\boxed{|f(x,y)| \leq \underline{a(x)}\,|y| + \underline{b(x)}}$ SUBLINEARITÀ DI f IN y

CON a, b POSITIVE E CONTINUE $\Rightarrow$

SE CONSIDERO IL PROBLEMA IN $E = I_\delta \times \mathbb{R}^n$ $\begin{pmatrix} a = \delta \\ r = +\infty \end{pmatrix}$

HO CHE $|y(x)| \leq (y_0 + aB) + A\int |y|$, CON $A = \sup_{I_\delta} a$, $B = \sup_{I_\delta} b$

$\Rightarrow$ PER GRONWALL $\boxed{|y(x)| \leq (y_0 + aB)\, e^{A|x - x_0|}} < +\infty \quad x \in I_\delta$

$\Rightarrow$ HO ESISTENZA GLOBALE PER IL PROBLEMA.

CASO SPECIALE: SISTEMI LINEARI IN y

$$y' = A(x)\cdot y + b(x)$$

$A: I \to M_{n,n}$ CONT.

$b: I \to \mathbb{R}^n$ CONT.

SIAMO NELLE IPOTESI DI $\exists!$ E DI $\exists$ GLOBAE

$M_{n,n} \simeq \mathbb{R}^{n^2}$ LO CONSIDERO CON LA NORMA

$$\|M\| = \max_{|x|\leq 1} |Mx|_{\mathbb{R}^n}$$

(MASSIMO AUTOVALORE)

È UNA NORMA SU $M_{n,n}$:

- $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$
- $\|A\cdot B\| \leq \|A\|\cdot\|B\|$
- $\|A\| \leq \|A\|_{\mathbb{R}^{n^2}} = \left(\sum_{i,j} a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}$

VERIFICHE DIRETTE

$b=0$ IL SISTEMA È OMOGENEO

$A(x)=A \ \forall x$ IL SISTEMA È A COEFF. COSTANTI

$b=0 \Rightarrow$ LE SOL. DI $y'=A(x)y$ SONO UNO SP. VETT.

DI DIMENSIONE n, CON BASE LE SOL. y_i DI

$$\begin{cases} y'=A(x)y \\ y(0)=e_i \end{cases}$$

INFATTI $\forall y_0=((y_0)_1, \dots (y_0)_n)$

$y(x)=\sum_i (y_0)_i \, y_i(x)$ È SOL.

DI $\begin{cases} y'=A(x)y \\ y(0)=y_0 \end{cases}$ MA È ANCHE L'UNICA PER UNICITÀ

NEL CASO GENERALE $y' = A(x)y + b(x)$ SI

OSSERVA CHE y_1, y_2 SONO SOLUZIONI $\Rightarrow$

$(y_1 - y_2)' = A(x)(y_1 - y_2) \Rightarrow y_1 - y_2$ È SOL. DEL

SISTEMA OMOGENEO $\Rightarrow$ LE SOLUZIONI

SONO UNO SPAZIO AFFINE DI DIM. n

$$y(x) = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{SOL. PARTICOLARE}}}{y_p(x)} + y_0(x)$$

$\rightarrow$ (GENERICA) SOL. DEL SISTEMA OMOGENEO

OSS: LE EQ. LINEARI DI ORDINE $K > 1$

RIENTRANO IN QUESTO CASO

$$y^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{k-1} a_i(x)\, y^{(i)}(x) + b(x)$$

$y : I \to \mathbb{R}$

$a_i, b : I \to \mathbb{R}$

$$Y(x) : I \to \mathbb{R}^K \qquad \boxed{Y_i(x) = y^{(i-1)}(x)}$$

$\Vert$

$$\begin{cases} Y_i'(x) = Y_{i+1} & 1 \leq i \leq K-1 \\ Y_K' = \sum_{i=0}^{K-1} a_i Y_{i+1} + b(x) \end{cases} \Rightarrow Y' = A(x)Y + B$$

$$B(x) = (0, \dots, b(x)) \in \mathbb{R}^K$$

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ & 0 & 1 & & \\ 0 & & 0 & 1 & \\ & & & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \dots & & a_{k-1} \end{pmatrix}$$

SISTEMI LIEARI OMOGENEI A COEFF. COSTANTI

$y' = Ay \qquad A \in M_{n,n}$ (RISOLUBILI ESPLICITAMENTE)

INTRODUCIAMO L'ESPONENZIALE DI UNA MATRICE:

$e^{A} : M_{n,n} \to M_{n,n}$ DEFINITA DALLA SERIE

$$e^{A} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \lim_{N \to +\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{A^k}{k!}$$

OSSERVIAMO CHE, PONENDO $f_k(A) = \dfrac{A^k}{k!} : M_{n,n} \to M_{n,n}$

SI HA $\sum_{k=0}^{N} \| f_k(A) \| \leq \sum_{k=0}^{N} \dfrac{\|A\|^k}{k!} \leq e^{\|A\|} \leq e^R$, SE $\|A\| \leq R$

QUINDI, PER IL CRITERIO DELLA CONV. TOTALE

NELLO SPAZIO $M_{n,n}$, DATO CHE $\sum_{k=0}^{\infty} \left\| \dfrac{A^k}{k!} \right\| \leq e^{\|A\|}$,

LE SOMME PARZIALI $f_N(A) \to e^A$ UNIF.

SUI COMPATTI DI $M_{n,n}$, CON $\|e^A\| \leq e^{\|A\|}$.

PROPRIETÀ DI e^A:

(1) $AB = BA \Rightarrow e^{A+B} = e^A \cdot e^B = e^B \cdot e^A$

$$e^{A+B} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A+B)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \frac{A^i B^{k-i}}{k!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{k} \frac{A^i}{i!} \cdot \frac{B^{k-i}}{(k-i)!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B^j}{j!} \qquad (j = k-i)$$

OSS: NON È VERO SE A, B NON COMMUTANO

② RAGIONANDO COME PER e^x SI PUÒ MOSTRARE

CHE $e^A = \lim_{n \to +\infty} \left(I + \frac{A}{n} \right)^n$ CON I MATRICE IDENTITÀ

③ USANDO IL FATTO CHE $\det(I + \varepsilon A) = 1 + \varepsilon \operatorname{tr}(A) + o(\varepsilon)$

CHE SEGUE DAL FATTO CHE

$$\det(I + \varepsilon A) = \prod_i (1 + \varepsilon \lambda_i) = 1 + \varepsilon \sum_i \lambda_i + o(\varepsilon) = 1 + \varepsilon \operatorname{tr}(A) + o(\varepsilon)$$

$\lambda_i \in \mathbb{C}$ AUTOVALORI,

SI PUÒ OTTENERE $\boxed{\det e^{A} = e^{\operatorname{tr} A} > 0}$

(VERIFICA PER ESERCIZIO)

4 $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow A^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow e^{A} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

TEOREMA: LA FUNZIONE $x \to e^{Ax}$ È DIFF.

E SI HA $\frac{d}{dx} e^{Ax} = A \cdot e^{Ax}$.

DI CONSEGUENZA LA SOL. DI $\begin{cases} y' = Ay \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

È DATA DA

$$\boxed{y(x) = e^{A(x-x_0)} \cdot y_0}$$

DIM.

$(Ax \text{ E } Ah \text{ COMMUTANO})$

$$\frac{d}{dx} e^{Ax} = \lim_{h \to 0} \frac{e^{A(x+h)} - e^{Ax}}{h} = e^{Ax} \lim_{h \to 0} \frac{e^{Ah} - I}{h}$$

$$e^{Ah} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k h^k}{k!} = I + h \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k h^{k-1}}{k!}}_{= A + O(h)}$$

$$\frac{d}{dx} e^{Ax} = e^{Ax} \lim_{h \to 0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k h^{k-1}}{k!} = e^{Ax} \cdot A = A \cdot e^{Ax}.$$

OSS: RESTA IL PROBLEMA DI "CALCOLARE" e^{Ax}.

ANALOGAMENTE ALLE EQ. DEL PRIMO ORDINE,

LA SOL. DI $\begin{cases} y' = Ay + b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

E' DATA DA $\boxed{y(x) = \underbrace{e^{A(x-x_0)} y_0}_{\text{SOL. DEL SIST. OMOGENEO}} + \underbrace{e^{Ax} \cdot \int_{x_0}^{x} e^{-A(s)} b(s)\, ds}_{\text{SOL. PARTICOLARE}}}$

INFATTI $y'(x) = A e^{A(x-x_0)} \cdot y_0 + A \cdot e^{Ax} \int_{x_0}^{x} e^{-A(s)} b(s) + \cancel{e^{Ax}} \cdot \cancel{e^{-A(x)}} \cdot b(x)$

$= A y(x) + b(x)$ E $y(x_0) = y_0$.