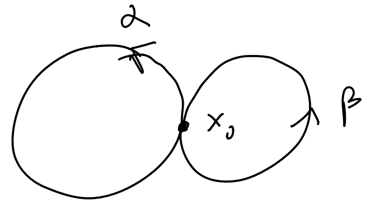
ESERCIZIO 28

X



$$\pi_1(X, x_0) = \langle \alpha, \beta \rangle$$

Se E, E' sono riv. connessi $\qquad p: E \longrightarrow X$, $\quad p': E' \longrightarrow X$

e $\quad H = p_*(\pi_1(E, \tilde{x}_0)) \qquad p(\tilde{x}_0) = x_0$

$\quad H' = p'_*(\pi_1(E, \tilde{x}_0')) \qquad p'(\tilde{x}_0') = x_0$

E ed E' sono isomorfi come rivestimenti $\Longleftrightarrow$ H e H' coniugati $\|$

grado del rivestimento $p: E \longrightarrow X$ è uguale all'indice $[\pi_1(X, x_0) : \underline{H}]$.

I RIVESTIMENTI CONNESSI DI GRADO DUE CORRISPONDONO AI SOTTOGRUPPI DI INDICE 2. CHE SONO TUTTI NORMALI.

QUINDI VOGLIAMO CLASSIFICARE I SGR NORMALI DI INDICE 2 DI $\pi_1(X, x_0) = \langle \alpha, \beta \rangle$

$$H \subset \langle \alpha, \beta \rangle$$

$$\frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{H} \simeq \mathbb{Z}/_2$$

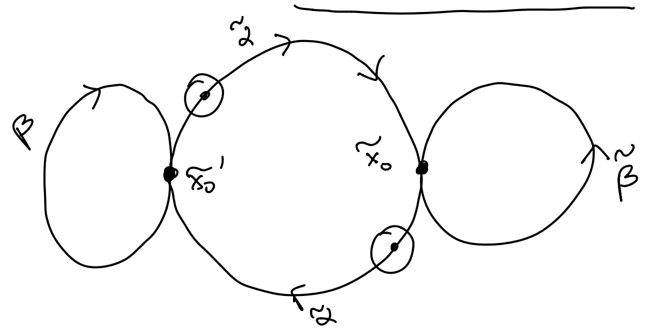
ogni tale H è il nucleo di un morfismo surgettivo $\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \longrightarrow \mathbb{Z}/2 = \{0, 1\}$ |
$H = \ker \varphi$.

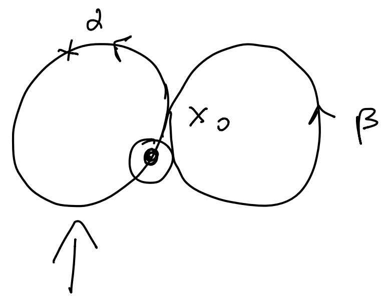
$\varphi(\alpha) = 0 \qquad \varphi(\beta) = 0 \qquad$ NON È SURGETTIVO

- $\varphi(\alpha) = 1 \qquad \varphi(\beta) = 0 \qquad \beta \in H \quad \alpha^2 \in H \quad \alpha \notin H$
- $\varphi(\alpha) = 0 \qquad \varphi(\beta) = 1 \qquad \alpha \in H \quad \beta^2 \in H \quad \beta \notin H$
- $\varphi(\alpha) = 1 \qquad \varphi(\beta) = 1 \qquad \alpha, \beta \notin H$.

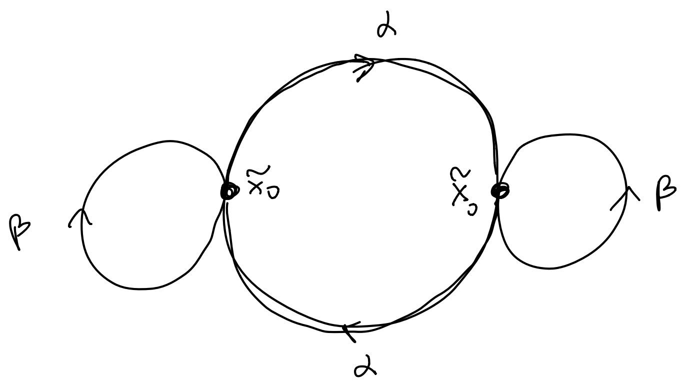
QUINDI ESISTO TRE RIVESTIMENTI CONNESSI DI GRADO 2 A MENO DI ISOMORFISMO DI RIVESTIMENTO.

DISEGNI $\qquad \varphi(\alpha) = 1 \quad \varphi(\beta) = 0 \qquad \beta \qquad \varphi(\alpha * \alpha) = 2\varphi(\alpha) = 0.$



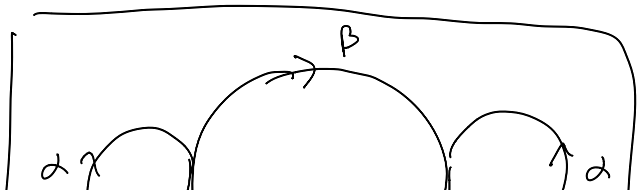


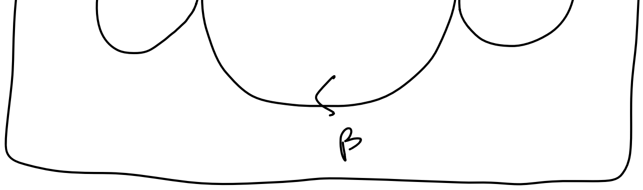
IL RIVESTIMENTO CORRISPONDENTE È



SONO SPAZI OMEOMORFI MA NON SONO RIV. ISOMORFI

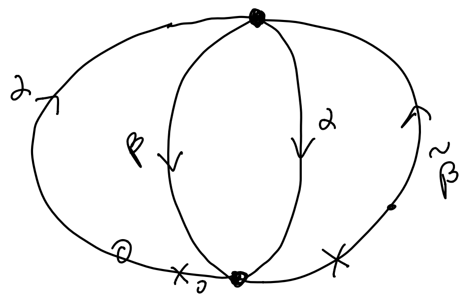
2° CASO $\qquad \varphi(\beta) = 1 \qquad \varphi(\alpha) = 0.$

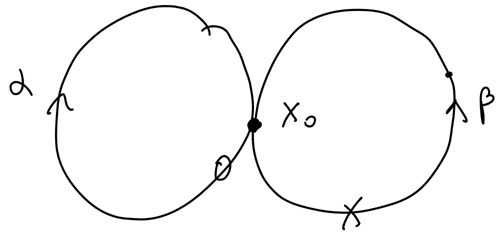


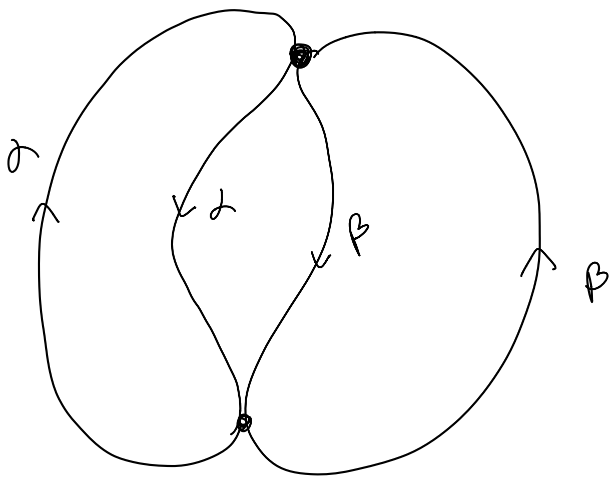


3°

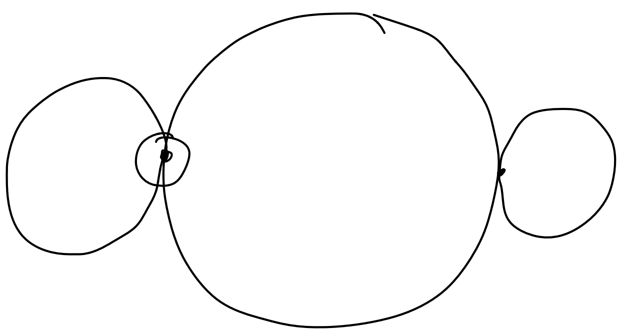
$\varphi(\alpha) = 1 \qquad \varphi(\beta) = 1$

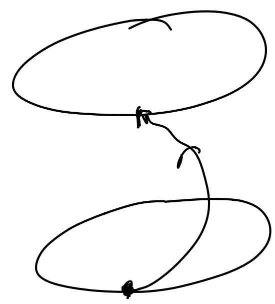






NON È OMEOMORFO AI PRECEDENTI





ES

$H = p_*(\pi_1(E, \tilde{x}_0))$

è un sgr di indice 2.

$\boxed{H = \pi_1(X, x_0)}$

perché $\pi_1(X,x_0)$ agisce trans sulla fibra
e lo stabilizzatore di $\tilde{x}_0$ è H. $\Rightarrow$ H ha indice 2.

ESERCIZIO 27

X conn e loc. conn per archi $\quad p: E \to X$ riv universale

$x_0 \in X \qquad p(y_0) = x_0$

$$\Phi : Aut_X(E) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$$

$$g \longleftrightarrow \gamma$$

$$\boxed{g(y_0) = y_0 \cdot \gamma}$$

Sia H un sgr di $\pi_1(X, x_0)$ e sia $K = \Phi^{-1}(H)$.

VOGLIAMO COSTRUIRE UN RIV. TALE CHE $p_*(\pi_1(E', y_0')) = H$.

$K \backslash E = E' \xrightarrow{p'} X$ è un rivestimento di X.

$q: E \longrightarrow K \backslash E = E'$ è un rivestimento di E'.

$$\begin{tikzcd}
y_0 \arrow[dd] & \in & E \arrow[dd, "p"] \arrow[dr, "q"] \arrow[rrrr, bend left] & & & & \\
& & & E' = K \backslash H \arrow[dl, "p'"] & \ni & y_0' = q(y_0) \arrow[lllllld, bend left] & \\
x_0 & \in & X & & & &
\end{tikzcd}$$

$$p'_*(\pi_1(E', y_0')) = H.$$

dim

Sia $\tilde{H} = p'_*(\pi_1(E', y_0'))$

$$\gamma \in \tilde{H} \iff y_0' \cdot \gamma = y_0'$$

$$\iff q(y_0) \cdot \gamma = q(y_0)$$

$$\quad\; \| $$

$$q(y_0 \cdot \gamma)$$

$$\gamma \in \tilde{H} \iff \underline{q(y_0 \cdot \gamma) = q(y_0)}$$

$$y_0 \cdot \gamma = \Phi^{-1}(\gamma)(y_0)$$

$$q\big(\underbrace{\Phi^{-1}(\gamma)}\,(y_0)\big) = q(y_0)$$

$$q : E \longrightarrow E' = K \backslash E$$

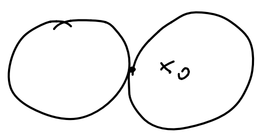
ovvero $\Phi^{-1}(\gamma) \in K$

ovvero $\gamma \in \Phi(K) = H$

#

<u>ESERCIZIO</u>

CLASSIFICARE I RIV CONN DI GRADO 3.

DI $X =$  $\pi_1 = \pi_1(X, x_0)$

1) IL CASO NORMALE O REGOLARE.

DOBBIAMO CLASSIFICARE I SGR. NORMALI H DI INDICE 3 DI π_1.

$$\frac{\pi_1}{H} \cong \mathbb{Z}/3$$

Classifico le mappe surgettive da

$$\pi_1 \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z}/3 \qquad \begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & 0 \\ 1 & \searrow\!\!\!\!\nearrow & 1 \\ -1 & & -1 \end{array}$$

NON MI INTERESSA φ INTERESSA $\ker \varphi$.

2) IL CASO NON NORMALE.

SIA H DI INDICE 3. $\bigcap_g gHg^{-1} = H'$

H' è normale.

$$\pi_1 \xrightarrow{\rho} \text{Bigezioni}\left(\pi_1/H\right) \simeq \underline{S_3}$$

$$g \qquad\qquad (aH \to gaH)$$

ovvero π_1 agisce a sinistra su π_1/H.

$$\ker \rho = \{ h \in \pi_1 : \quad hgH = gH \quad \forall g \in \pi_1 \}$$

$$hgHg^{-1} = gHg^{-1}$$

$$h \in gHg^{-1}$$

$$= \bigcap_{g \in G} gHg^{-1} = H'.$$

<u>OSS</u> Se H non è normale H' è più piccolo di H e ha indice 6.

$$\pi_1/H' \simeq S_3$$

- Classifico intanto le $\varphi : \pi_1 \longrightarrow S_3$ surgettive $\rightsquigarrow$ determino H'.

$$\frac{\Pi_1}{H'} = S_3$$

$$\frac{H \cdot}{H' \cdot} \subset S_3$$

H/H' è un sgr di S_3 di 2 elementi

$H = \varphi^{-1}(L)$ $\quad$ L sgr di 2 elementi di S_3.

Richiami di Analisi 2

$U \subset \mathbb{R}^m$ $\quad$ U aperto

$f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$

funzione differenziabile in $p \in U$

$$df_p : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{lineare}$$

derivata parziale $v \in \mathbb{R}^m$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(p) \in \mathbb{R}^n$$ e in particolare $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial e_i}$

Se f è differenziabile in p ovvio.

$$df_p[v] = \frac{\partial f}{\partial v}(p)$$

Se $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$ $\quad$ $df = \begin{pmatrix} df_1 \\ \vdots \\ df_n \end{pmatrix}$

$$df_p[v] = \begin{pmatrix} df_{1,p}[v] \\ \vdots \\ df_{n,p}[v] \end{pmatrix}$$

e analogamente per $\frac{\partial f}{\partial v}$.

Se $f = x_i : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$

$$d x_{i_p} (v) = v_i \qquad \text{dove } v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$$

In particolare

$$d f_p [v] = \underline{d f_p} [v_1 e_1 + \dots + v_m e_m]$$

$$= d f_p [e_1] \underline{v_1} + \dots + d f_p [e_m] v_m$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) \, d x_1 [v] + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(p) \, d x_m [v]$$

$$d f_p = \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) \, d x_{1,p} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(p) \, d x_{m,p}$$

- QUANDO $n = 2$ $\quad f : U \longrightarrow \mathbb{R}^2 = \underline{\mathbb{C}}$

  Ha senso fare $f_1 \cdot f_2$

  e se $f \neq 0$ ha senso fare $\frac{1}{f}$

  (e ha anche senso $\overline{f}$)

PER QUESTE OPERAZIONI VALGONO LE STESSE REGOLE CHE VALGONO PER LE FUNZIONI A VALORI REALI

- Se f_1 e f_2 sono differenziabili in allora

$$\left(d\, f_1 f_2\right)_p = f_1(p)\, d{f_2}_p + f_2(p)\, d{f_1}_p$$

LO STESSO VALE PER LE DERIVATE PARZIALI

- Se f è differenziabile in p e $f(p) \neq 0$

HA SENSO $\frac{1}{f}$ in un intorno di p

$$\left(d\, \frac{1}{f}\right)_p = -\frac{1}{f(p)^2}\, df_p$$

- Infine $d\overline{f}_p = \overline{df_p}$

OVVERO $d\overline{f}_p[v] = \overline{df_p[v]}$

<u>DIMOSTRAZIONE</u>:

<u>1ª POSSIBILITÀ</u> LA DIM. FATTA NEL CASO REALE FUNZIONA ANCHE QUI ($f_1 f_2$ e $\frac{1}{f}$)

<u>2ª POSSIBILITÀ</u>

$f: U \longrightarrow \mathbb{C} = \mathbb{R}^2 \qquad f = \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$f = g + ih \qquad$ con $g, h: U \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$df_p = \begin{pmatrix} dg_p \\ dh_p \end{pmatrix} \qquad \boxed{df_p = dg_p + i\, dh_p}$$

Per dimostrare la formula del prodotto

$$f_1 = g_1 + i h_1 \qquad f_2 = g_2 + i h_2$$

$$f_1 f_2 = (g_1 g_2 - h_1 h_2) + i\,(g_1 h_2 + g_2 h_1)$$

$$d f_1 f_2 = d(g_1 g_2 - h_1 h_2) + i\, d(g_1 h_2 + g_2 h_1) =$$

IL CASO REALE È NOTO.

$$= g_1\, dg_2 + g_2\, dg_1 - h_1\, dh_2 - h_2\, dh_1$$

$$+ i\left(g_1\, dh_2 + h_2\, dg_1 + g_2\, dh_1 + h_1\, dg_2\right) =$$

$$= \boxed{g_1\, dg_2 - h_1\, dh_2 + i\left(g_1\, dh_2 + h_1\, dg_2\right)}$$

$$+ g_2\, dg_1 - h_2\, dh_1 + i\left(g_2\, dh_1 + h_2\, dg_1\right) =$$

$$= f_1\, df_2 + f_2\, df_1$$

- SI RAGIONA ANALOGAMENTE PER $\frac{1}{f}$.

- INFINE SE $f = g + ih$ $\quad \bar{f} = g - ih$

$$d\bar{f} = dg - i\, dh = \overline{df}$$

#

- NOI SAREMO INTERESSATI SOPRATTUTTO AL CASO IN CUI ANCHE $m = 2$

$$f : \mathbb{C} \supset U \longrightarrow \mathbb{C}$$

TRA LE FUNZIONI DI QUESTO TIPO NE ABBIAMO ALCUNE PARTICOLARI

FISSO DELLE COORDINATE x, y SONO

LE COORDINATE IN $\mathbb{R}^2$ e $z = x + iy$.

$$f = z = \mathrm{id} : U \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$dz = dx + i\,dy.$$

$$f = \bar{z} : U \longrightarrow \mathbb{C} \qquad x+iy \longrightarrow x-iy$$

$$d\bar{z} = dx - i\,dy.$$

OSSERVAZIONE

$$dx = \frac{dz + d\bar{z}}{2} \qquad dy = \frac{dz - d\bar{z}}{2i}$$

Se $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ $\quad U \subset \mathbb{C}$

è differenziabile in P

$$df_P = \frac{\partial f}{\partial x}(P)\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}(P)\,dy$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(P)\,\frac{dz + d\bar{z}}{2} + \frac{\partial f}{\partial y}(P)\,\frac{dz - d\bar{z}}{2i}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(P) + \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}(P)\right) dz$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(P) - \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}(P)\right) d\bar{z}$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(P) - i\,\frac{\partial f}{\partial y}(P)\right)} dz$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(P) + i\,\frac{\partial f}{\partial y}(P)\right) d\bar{z}$$

Se pongo $\dfrac{\partial f}{\partial z}(p) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(p) - i\,\dfrac{\partial f}{\partial y}(p)\right)$

e $\dfrac{\partial f}{\partial \bar z}(p) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(p) + i\,\dfrac{\partial f}{\partial y}(p)\right)$

ABBIAMO

$$df_p = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial z}(p)}\,dz + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial \bar z}(p)}\,d\bar z$$

OSSERVAZIONE 1

- $\dfrac{\partial z}{\partial z} = 1 \qquad \dfrac{\partial z}{\partial \bar z} = 0$

VERIFICA

- $$\frac{\partial (x+iy)}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\, x+iy}{\partial x} - i\,\frac{\partial\, x+iy}{\partial y}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - i\,(+i)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(2) = 1.$$

VERIFICA SIMILE PER $\dfrac{\partial \bar z}{\partial \bar z} = 0$

- $\dfrac{\partial \bar z}{\partial z} = 0 \qquad \dfrac{\partial \bar z}{\partial \bar z} = 1.$

OSSERVAZIONE 2

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(f_1 f_2\right) = \frac{\partial f_1}{\partial z} f_2 + f_1 \frac{\partial f_2}{\partial z} .$$

$f = z^n$

$$d z^n = \frac{\partial z^n}{\partial z} dz + \frac{\partial z^n}{\partial \bar z} d\bar z$$

$\frac{\partial}{\partial z}$

$3\frac{\partial}{\partial x} + 5i\frac{\partial}{\partial y}$

$$= n z^{n-1} \overbrace{\left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)}^{=1} dz + n z^{n-1} \overbrace{\left(\frac{\partial z}{\partial \bar z}\right)}^{=0} d\bar z$$

$$= n z^{n-1} dz$$

$$z^n = (x+iy)^n$$

AZIONE DI MONODROMIA.

$$H \backslash \pi_1 \longleftrightarrow p^{-1}(x_0)$$

$$Hg \longrightarrow \tilde{x}_0 \cdot g$$