1 - FORME CONTINUE A VALORI COMPLESSI

$U \subset \mathbb{R}^m$

una 1-forma continua a valori complessi su U

è $\omega : \underset{\uparrow}{U} \times \underline{\underline{\mathbb{R}^m}} \longrightarrow \mathbb{C}$

- continua $\forall v_1, v_2 \in \mathbb{R}^m$
- lineare: $\omega(u, v_1 + v_2) = \omega(u, v_1) + \omega(u, v_2)$

$\omega(u, \lambda v) = \lambda\, \omega(u, v) \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$

A NOI INTERESSA IL CASO $m = 2$ $\quad U \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$

. NOTAZIONE $\qquad \omega(u, v) = \omega_u(v)$

. $m = 2$ $\qquad x, y$ sono le coordinate su $\mathbb{R}^2$

$a(u) = \omega_u(e_1) \qquad b(u) = \omega_u(e_2)$

$$\omega_u = \underline{a(u)\, dx + b(u)\, dy.}$$

$$\omega_u(x e_1 + y e_2) = x\, \omega_u(e_1) + y\, \omega_u(e_2)$$
$$= \big(a(u)\, dx + b(u)\, dy\big)(x e_1 + y e_2)$$

ESEMPIO FONDAMENTALE

Se $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ è una funzione C^1

allora

df è una 1-forma continua.

$$df = \boxed{\frac{\partial f}{\partial x}}\, dx + \boxed{\frac{\partial f}{\partial y}}\, dy$$

OSS $\omega_u = a(u)dx + b(u)dy$ è conhe se

$a, b : U \to \mathbb{C}$ solo continue.

DEFINIZIONE

- Se ω è una 1-forma continua su U si dice esatta se $\exists\ f : U \to \mathbb{C}$ C^1 tale che $df = \omega$.

|| • ω si dice localmente esatta (noi useremo anche il termine chiusa) se $\forall\ p \in U\ \exists\ V \subset U$ intorno di p e $\omega|_{V \times \mathbb{R}^n}$ $\omega_V : V \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$

$$\omega_V(u, v) = \omega(u, v)$$

tale che ω_V è esatta, ovvero esiste $f : V \to \mathbb{C}$ e $df = \omega$ su V

- ω è C^1-chiusa se $\omega = a\,dx + b\,dy$ con a, b C^1 e se

$$\frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial b}{\partial x} \quad ||$$

TEOREMA (DA ANALISI 2) Se ω è una 1-forma C^1 ($\omega = a\,dx + b\,dy$ con a e b C^1)

ω è loc. esatta $\Leftrightarrow$ ω è C^1-chiusa (chiusa)

NOTAZIONE

$U \subset \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$

$B^1(U) = \{$ 1 - forme esatte su $U \}$
(continue a valori complessi)

$Z^1(U) = \{$ 1 - forme chiuse su U
(loc. esatte) $\}$

$B^1(U) \subset Z^1(U)$

OSSERVAZIONE

Se $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ differenziabile e $df = 0$

allora f è localmente costante
($\forall p \in U \ \exists V \subset U$ int. di p e $f|_V$ è costante)

dim. Sia $V = B(p, \rho) \subset U$
e dimostro che $f|_V$ è costante.

Sia $q \in V$ e dimostro che $f(q) = f(p)$

$h(t) = f(p + t(q-p))$

$h(0) = f(p) \qquad h(1) = f(q)$

$h'(t) = 0 \qquad h : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}.$

$h'(t) = df_{p+t(q-p)}[q-p]$

e quindi h è costante

#

OSSERVAZIONE

$f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ $\qquad U$ connesso

è localmente costante $\Rightarrow$ f è costante.

dim

$$U = \coprod_{\lambda \in \mathbb{C}} \boxed{f^{-1}(\lambda)}$$

Se f è loc. costante $f^{-1}(\lambda)$ è aperto.

per connessione di U $\exists \lambda_0 : U = f^{-1}(\lambda_0)$

#

OSSERVAZIONE

- Se U è connesso e ω è una 1-forma esatta allora la funzione f tale che

$$df = \omega$$

è unica a meno di costante additiva.

$df_1 = df_2 = \omega$

$d(f_1 - f_2) = 0$

(f la chiameremo primitiva)

- Se ω è una 1-forma chiusa (cioè loc. esatta) e $p \in V \subset U$ $\quad V$ aperto convesso la f tale che $\underline{df = \omega}$ su V

è unica a meno di costante additiva.

(queste f le chiameremo primitive locali).

INTEGRAZIONE DI 1-FORME SU CURVE C^1 E C^1 A TRATTI

Sia ω una 1-FORMA su $U \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$.

e sia $\gamma : [a, b] \longrightarrow U$ una curva C^1. (estremi inclusi).

Allora definiamo

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \omega_{\gamma(t)} [\gamma'(t)] \, dt$$

$$\omega(\underset{\underset{U}{\cap}}{\gamma(t)}, \underset{\underset{\mathbb{R}^2}{\cap}}{\gamma'(t)})$$

OSSERVAZIONE

$\int_\gamma \omega$ NON DIPENDE DALLA PARAMETRIZZAZIONE DI γ.

Se $\varphi : \underset{c<d}{[c, d]} \longrightarrow \underset{a<b}{[a, b]}$ $\quad \underline{\varphi(c) = a \quad \varphi(d) = b}$

è C^1 e $\delta = \gamma \circ \varphi$

Allora $\int_\delta \omega = \int_\gamma \omega$

dim.

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \overset{F(t)}{\overset{\parallel}{\omega_{\gamma(t)} [\gamma'(t)]}} \, dt$$

$$\int_\delta \omega = \int_c^d \omega_{\gamma(\varphi(t))} [\gamma'(\varphi(t))] \, \varphi'(t) \, dt$$

$$= \int_c^d F(\varphi(t)) \, \varphi'(t) \, dt$$

#

OSSERVAZIONE $\quad a < c < b$

Se $\quad \gamma : [a, b] \longrightarrow U \quad C^1$

$$\gamma_1 : [a, c] \longrightarrow U \qquad \gamma_1\Big|_{[a,c]}$$

$$\gamma_2 : [c, b] \longrightarrow U \qquad \gamma_2\Big|_{[c,b]}$$

$$\boxed{\int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega = \int_{\underline{\gamma}} \omega}$$

DEFINIZIONE

CURVA C^1 A TRATTI.

$\gamma : [a, b] \longrightarrow U$ continua.

diciamo che è C^1 a tratti se esistono $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

con $\gamma_i = \gamma\Big|_{[x_{i-1}; x_i]} : [x_{i-1}, x_i] \longrightarrow U$

γ_i è C^1

$$\int_a^b F(t)\,dt = \int_c^d F(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

$\varphi : [c, d] \longrightarrow [a, b]$

$\varphi(c) = a \qquad \varphi(d) = b.$

$$\rightarrow \quad G(s) = \int_a^s F(t)\,dt \qquad G'(s) = F(s) \qquad G(b) = \int_a^b F(t)\,dt.$$

$$G(\varphi(s)) = \boxed{\int_a^{\varphi(s)} F(t)\,dt = \int_c^s F(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt}$$

Per $s = d$ ottengo quello che mi interessa

Per $s = c$ è ovvio

$$\int_a^a = 0 = \int_c^c = 0.$$

La deriva di quello di destra è

$$G'(\varphi(s))\,\varphi'(s) \qquad\qquad F(\varphi(s))\,\varphi'(s)$$

$$\parallel$$

$$F(\varphi(s))\,\varphi'(s)$$

DEFINIZIONE

CURVA C^1 A TRATTI.

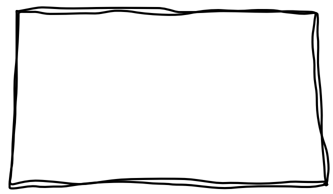
$\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ continua.

diciamo che è C^1 a tratti se

esistono $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

con $\gamma_i = \gamma \Big|_{[x_{i-1}, x_i]} : [x_{i-1}, x_i] \longrightarrow U$

γ_i è C^1



SE ω È UNA 1-FORMA

$$\int_\gamma \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega + \dots + \int_{\gamma_n} \omega$$

- SE γ È C^1 OTTENIAMO LA VECCHIA DEFINIZIONE
- QUESTA DEFINIZIONE NON DIPENDE DALLA SCELTA DI $x_1 \dots x_n$

OSSERVAZIONE

$\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$

Se $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \longrightarrow U$ C^1 A TRATTI

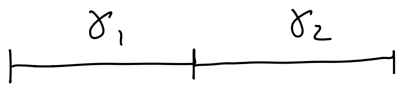
$$\int_{\gamma_1 * \gamma_2} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega$$

INFATTI: $\underbrace{\gamma_1 * \gamma_2} = \gamma : [0,1] \longrightarrow U$

$$\gamma(t) = \delta(2t) \qquad \delta : [0,2] \longrightarrow U$$

$$\delta(t) = \gamma_1(t) \qquad t \leq 1$$

$$\delta(t) = \gamma_2(t-1) \qquad t \geq 1$$



$$\int_\delta \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\underline{\gamma_2}} \omega$$

$$\parallel$$

$$\int_\gamma \omega$$

<u>LEMMA</u> Se $\omega = dF$ è esatta $\gamma : [a,b] \longrightarrow U$ C^1- A TRATTI

$$\int_\gamma \omega = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

<u>dim</u> BASTA FARLO PER CURVE C^1

INFATTI SE γ È C^1 A TRATTI

$$a = x_0 < \dots < x_n = b$$

$$\int_\gamma \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \dots + \int_{\gamma_n} \omega$$

$$\cancel{F(\gamma_1(x_1))} - F(\gamma_1(x_0)) + (\cancel{\dots}) + F(\gamma_n(x_n)) - F(\gamma_n(x_{n-1}))$$

$$= F(\gamma_n(x_n)) - F(\gamma_1(x_0)) =$$

$$= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

CASO C^1

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \omega_{\gamma(t)} [\gamma'(t)]\, dt =$$

$$= \int_a^b dF_{\gamma(t)} [\gamma'(t)]\, dt =$$

$$= \int_a^b (F\circ\gamma)'(t)\, dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

#

LEMMA

Sia U un aperto connesso di $\mathbb{C}$

Allora U è connesso per archi C^1 a tratti.

$\forall x, y$ $\exists \gamma$ cammino da x a y con γ C^1 - a tratti

dim

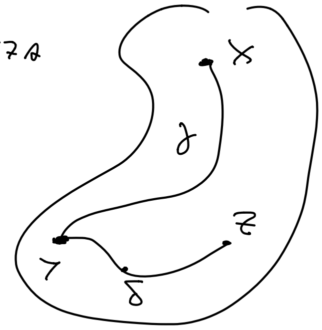
oss

Un aperto di $\mathbb{C}$ è localmente connesso per archi C^1 a tratti (per archi C^1)

infatti $B(x, \varepsilon)$ sono connesse per archi C^1

Diciamo che x, y sono equivalenti se esiste un cammino C^1 a tratti da x a y

QUESTA È UNA RELAZIONE DI EQUIVALENZA



Se γ va da x a y $\quad \gamma(1) = y$

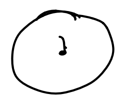
δ va da y a z $\quad \delta(0) = y$.

$\gamma * \delta$ è un cammino C^1 a tratti da x a z.

Sia $\mathcal{C}_x$ la classe di equivalenza di x

Per l'osservazione precedente $\mathcal{C}_x$ è aperto.

Infatti se $y \in \mathcal{C}_x$ e $B(y, \varepsilon) \subset U$



tutti i punti di $B(y, \varepsilon)$ sono equivalenti a y.

e quindi $B(y, \varepsilon) \subset \mathcal{C}_x$.

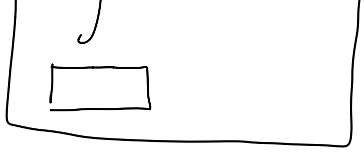
Quindi $$U = \coprod_{\substack{\mathcal{C} \text{ classe di} \\ \text{equival.}}} \mathcal{C} \Rightarrow U = \mathcal{C}_x$$

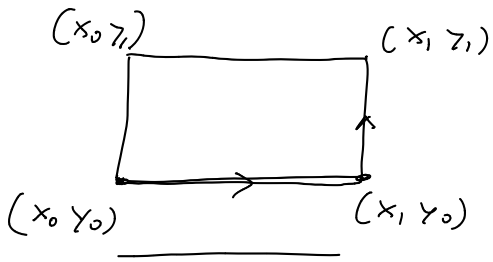
#

TEOREMA

Se $U = B(P_0, \varepsilon)$ e ω è una 1-forma su U allora

ω è esatta $\iff$ $\boxed{\int \omega = 0}$ $\forall$ rettangolo $\square \subset U$



Se 

Percorro il perimetro del rettangolo con una curva C^1 - a tratti. Per esempio

$$\gamma_1(t) = \left(x_0 + t(x_1 - x_0) \,;\, y_0 \right) \qquad 0 \le t \le 1$$

$$\gamma_2(t) = \left(x_1 \,;\, y_0 + (t-1)(y_1 - y_0) \right) \qquad 1 \le t \le 2$$

— —

— —

<u>dim</u>

$\boxed{\Rightarrow}$ $\omega = dF$

il cammino γ che percorre il bordo del rettangolo $\gamma : [a, b] \longrightarrow U$ verifica $\gamma(b) = \gamma(a)$

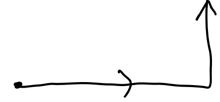
$$\int_\gamma \omega = F(\underline{\gamma(b)}) - F(\underline{\gamma(a)}) = 0$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Costruisco F

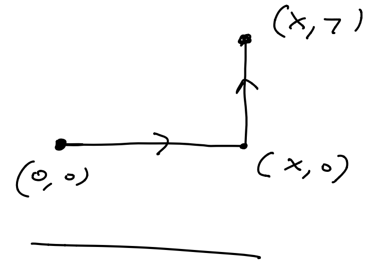
Per semplicità suppongo $P = (0, 0)$

$\omega = a\, dx + b\, dy.$

Definiamo $\quad F(x,y) = \int_\gamma \omega$



$$\begin{cases} \gamma(t) = (tx, 0) & 0 \le t \le 1 \\ \gamma(t) = (x, (t-1)y) & 1 \le t \le 2 \end{cases}$$



$$F(x,y) = \int_0^1 \omega_{\gamma(t)}[\gamma'(t)]\,dt + \int_1^2 \omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t))\,dt =$$

$(x,0) \qquad\qquad (0,y)$

$$= \int_0^1 x\,a(\gamma(t))\,dt + \int_1^2 y\,b(\gamma(t))\,dt$$

$$\omega_{\gamma(t)}[x,0] = x\big(\overset{\gamma(t)}{a}dx + \overset{\gamma(t)}{b}dy\big)[1,0] =$$

$$= x\,a(\gamma$$

$$\boxed{\begin{aligned} F(x,y) &= \int_0^1 x\,a(\gamma(t))\,dt + \int_1^2 y\,b(\gamma(t))\,dt \\ &= \int_0^1 x\,a(\gamma(t))\,dt + \int_0^y b(x,t)\,dt \end{aligned}}$$

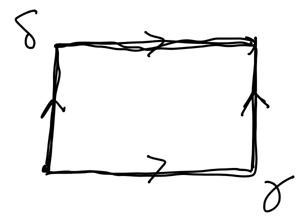
$\gamma(t) = (x, (t-1)y) \qquad s = (t-1)y.$

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \underline{b(x,y)}}$$

TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO

$$F(x,y) = \int_{\gamma} \omega = \int_{\delta} \omega$$

USO L'IPOTESI $\int_{\square} \omega = 0$



INFATTI RICORDIAMO $\int_{\square} \omega = 0$

$$\int_{\square} \omega = \int_{\gamma} \omega + \int_{\delta^{-1}} \omega = 0$$

<u>OSSERVAZIONE</u>

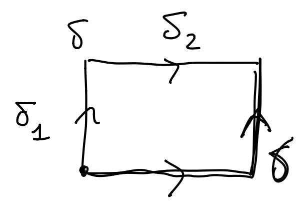
$$\int_{\delta^{-1}} \omega = - \int_{\delta} \omega \qquad \delta : [0,1] \to U$$

$$\delta^{-1}(t) = \delta(1-t)$$

$$\int_1^0 \omega_{\delta(t)}(\delta'(t)) = - \int_0^1 \omega_{\delta(t)}(\delta'(t)).$$

quindi

$$\int_{\gamma} \omega = - \int_{\delta^{-1}} \omega = \int_{\delta} \omega$$



$$F(x,y) = \int_{\delta_1} \omega + \int_0^x a(t,y)\, dt$$

$$\frac{\partial F}{} = a(t,y)$$

∂x

Abbiamo dimostrato F è C^1 e $\underline{dF = \omega}$ #