LEZIONE 25

15/4/2021

ANALISI 2

NOVAGA

SISTEMI AUTONOMI

$x' = f(x)$ $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

LO STUDIO DELLA STABILITÀ DEI PUNTI STAZIONARI $x: f(x) = 0$ SI FA GUARDANDO GLI AUTOVALORI DELLA MATRICE $Df(x)$

$Re(\lambda) > 0 \quad \forall \lambda$ AUTOVAL $\Rightarrow$ INSTABILITÀ SORGENTE

$Re(\lambda) < 0 \quad$ " $\Rightarrow$ STABILITÀ, POZZO

IN DIMENSIONE 2 ABBIAMO CLASSIFICATO I PUNTI STAZ. IN SELLE, FUOCHI (STAB. O INST.), NODI (STAB. O INST.) E CENTRI.

TEOREMA DI LINEARIZZAZIONE (HARTMAN - GROBMAN)

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ DI CLASSE C^1, p T.C. $f(p) = 0$ PUNTO STAZ.

IPERBOLICO, CIOÈ $Re(\lambda) \neq 0$ $\forall \lambda$ AUTOVAL. DI $Df(p)$,

$\Rightarrow$ $\exists$ $U \ni p$ INTORNO DI p E UN OMEOMORFISMO

$\Phi : U \to \mathbb{R}^n$ CHE MAPPA LE TRAIETTORIE DI $x' = f(x)$

IN QUELLE DEL LINEARIZZATO $X' = Df(p) \cdot X$.

PIÙ PRECISAMENTE $\Phi(p) = 0$ E $X(t; X_0) = \Phi\left(x\left(t; \underbrace{\Phi^{-1}(X_0)}_{x_0}\right)\right)$

DOVE $X(t; X_0)$ È SOL. DI $\begin{cases} X' = Df(p) X \\ X(0) = X_0 \end{cases}$

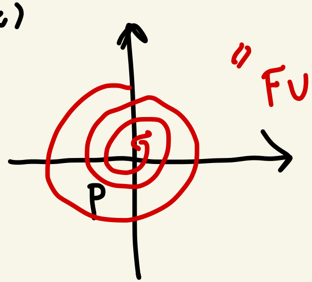
E $x(t; x_0)$ È SOL. DI $\begin{cases} x' = f(x) \\ x(0) = x_0 \in U \end{cases}$

LA DIMOSTRAZIONE NON È SEMPLICE, MA DERIVA DAL TEOREMA DELLE CONTRAZIONI.

OSS: IN GENERALE, ANCHE SE $f \in C^\infty$, Φ NON È C^1 MA SOLO HÖLDERIANO

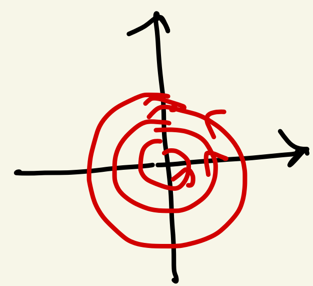
OSS: L'IPOTESI p IPERBOLICO È ESSENZIALE

$x' = f(x)$



"FUOCO"

$X' = Df(p)X$



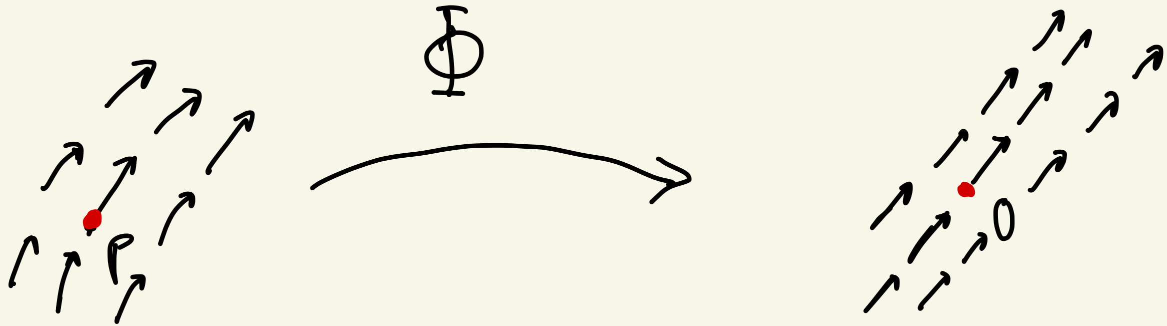
$Re(\lambda) = 0$

CENTRO

$f(x) = Df(p)(x-p) + o(x-p)$

OSS: FUORI DAI PUNTI STAZ. IL SISTEMA $x' = f(x)$

È REGOLARE



$x(t; x_0)$ $\qquad\qquad$ $X(t; X_0)$ $\qquad$ $X_0 = \Phi(x_0)$

Φ HA LA STESSA REGOLARITÀ DI f

$$X' = g(X) \cdot f(p)$$

$$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \qquad g(0) = 1$$

(TEOREMA DI RETTIFICAZIONE)

COSA SI PUÒ DIRE OLTRE ALLO STUDIO DEI PUNTI STAZIONARI?

① QUAL È IL COMPORTAMENTO DI $x(t;x_0)$ PER $t \to \pm\infty$?

② $\exists$ ORBITE PERIODICHE (NON COSTANTI)?

CIOÈ SOL. $x(t;x_0)$

T.C. $x(t+T;x_0) = x(t;x_0) \quad \forall t$

PER QUALCHE $T>0$ (PERIODO)

INSIEMI LIMITE

DATA UNA SOLUZIONE $x(t)$ CON $x(t_0)=x_0$

① SE È DEFINITA SU $[t_0,+\infty)$, SI DICE "ω-LIMITE" L'INSIEME DI "ACCUMULAZIONE" DI $x(t)$ PER $t\to+\infty$, CIOÈ $\bar{x}$ È ω-LIMITE

$\Longleftrightarrow \exists\, t_n \to +\infty$ CON $x(t_n)\to\bar{x}$

② SE È DEF. SU $(-\infty, t_0]$ SI DEFINISCE ANALOG.

L'α-LIMITE COME INSIEME DI "ACCUMULAZIONE" DI $x(t)$ PER $t\to-\infty$

PROP L = ω-LIMITE DI $x(t)$ [LO STESSO VALE PER L'α-LIMITE]

ALLORA

1. L CHIUSO
2. L È INVARIANTE, CIOÈ $\tilde{x}(t) \in L \quad \forall t > 0 \text{ e } \forall \tilde{x}_0 \in L$

   DOVE $\tilde{x}$ RISOLVE $\begin{cases} \tilde{x}' = f(\tilde{x}) \\ \tilde{x}(0) = \tilde{x}_0 \end{cases}$
3. SE L È COMPATTO È ANCHE CONNESSO

DIM. ① $\bar{x}$ PT. DI ACC. DI L

$\Rightarrow \exists\, x_n \to \bar{x}$ CON $x_n \in L$, $|x_n - \bar{x}| < \frac{1}{n}$,

$\Rightarrow \exists\, x(t_n)$ T.C. $|x_n - x(t_n)| < \frac{1}{n}$

$\Rightarrow x(t_n) \to \bar{x}$ PER $n \to +\infty \Longrightarrow \bar{x} \in L$.

② SIA $\tilde{x}(t)$ SOL. DI $\begin{cases} \tilde{x}' = f(\tilde{x}) \\ \tilde{x}(0) = \tilde{x}_0 \in L \end{cases}$

DATO CHE $\tilde{x}_0 \in L$, $\exists\, x(t_n) \xrightarrow[n]{} \tilde{x}_0 \Rightarrow$

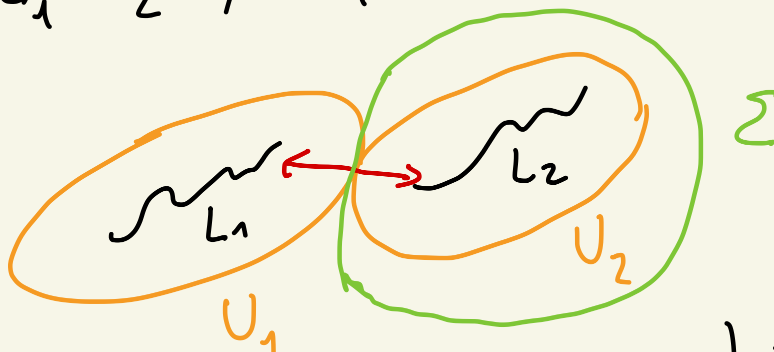
$x(t_n + t) \xrightarrow[n]{} \tilde{x}(t)$ $\forall t > 0$, PER LA DIP. CONTINUA DAI DATI INIZ,

$\Rightarrow \tilde{x}(t) \in L \quad \forall\, t > 0$.

③ L COMPATTO. SE PER ASSURDO NON È CONNESSO

$\Rightarrow \exists U_1, U_2$ APERTI DISGIUNTI T.C.

$L = L_1 \cup L_2 \,, \quad L_1 = L \cap U_1 \,, \quad L_2 = L \cap U_2$



$\min_{x \in L_1, y \in L_2} |x-y|$

$\parallel$

L_1, L_2 COMPATTI DISGIUNTI $\Rightarrow \operatorname{dist}(L_1, L_2) = \delta > 0$

SIA $\Sigma = \{x : \operatorname{dist}(x, L_2) = \delta/2\}$ $\exists\, t_n \to +\infty$ T.C. $x(t_n) \in \Sigma$

PER COMPATTEZZA $\exists\, x(t_{n_k}) \to \bar{x} \in \Sigma$

$\Rightarrow \bar{x} \in L$ MA $L \cap \Sigma = \emptyset$, ASSURDO.

TEOREMA (POINCARÉ - BENDIXON)

$n = 2$, L INSIEME LIMITE COMPATTO DI $x(t)$,

$f(x) \neq 0 \ \forall x \in L$ (NON CONTIENE PT. STAZIONARI)

$\Rightarrow L$ È UN'ORBITA PERIODICA (NON COSTANTE).

L SI DICE CICLO LIMITE DI $x(t)$.

COR: $K \subseteq \mathbb{R}^2$ COMPATTO INVARIANTE PER $x' = f(x)$
SENZA PUNTI STAZIONARI $\Rightarrow$
K CONTIENE UN'ORBITA PERIODICA.

BASTA PRENDERE L'ω-LIMITE DI $x(t; x_0)$
PER UN QUALUNQUE $x_0 \in K$

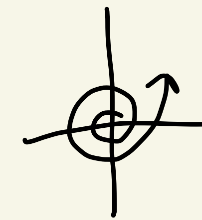
ES:

$$\begin{cases} x' = x - y - x(x^2+y^2) \\ y' = x + y - y(x^2+y^2) \end{cases}$$

$(0,0)$ È L'UNICO PUNTO STAZ.

$$Df(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

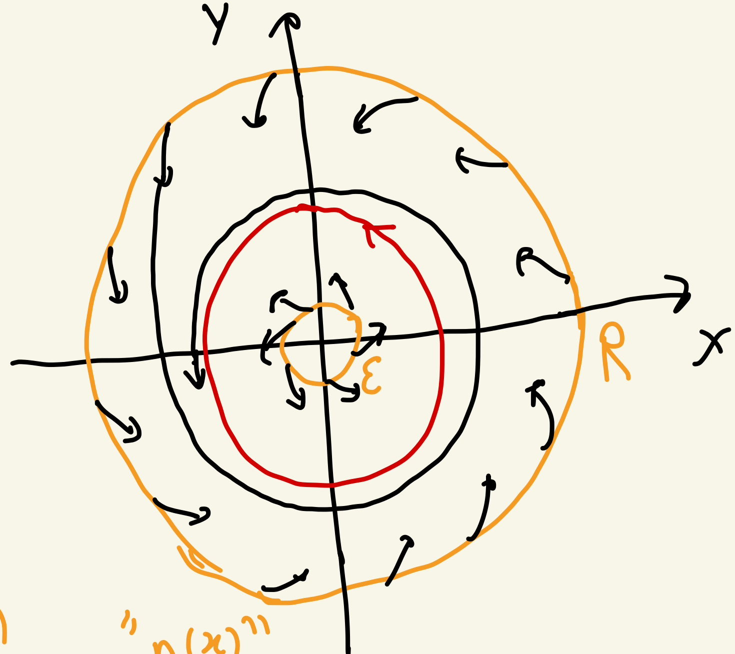
$\lambda_1 = 1+i$ $\lambda_2 = 1-i$



FUOCO INSTABILE

$K = \overline{B_R(0) \setminus B_\varepsilon(0)}$ $\varepsilon \ll 1$, $R \gg 1$ (ANELLO)

INVARIANTE PER IL FLUSSO, DEVO VEDERE



IN COORDINATE POLARI IL SISTEMA DIVENTA

$$\begin{cases} \rho' = \rho - \rho^3 \\ \theta' = 1 \end{cases}$$

$\rho(t) = 1$, $\theta(t) = t$

È L'ORBITA PERIODICA

$$\underbrace{(x'(t), y'(t))}_{f(x)} \cdot \underbrace{(x(t), y(t))}_{\text{"}n(x)\text{"}} = x(t)^2 + y(t)^2 - \left[x(t)^2 + y(t)^2\right]^2$$

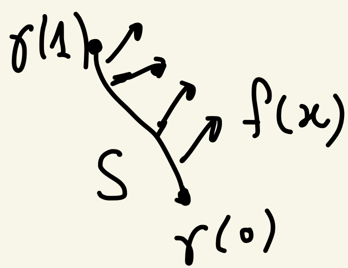
$$= \begin{cases} \varepsilon^2 - \varepsilon^4 > 0 & \text{su } \partial B_\varepsilon \\ R^2 - R^4 < 0 & \text{su } \partial B_R \end{cases}$$

DIM. DEL TEOREMA DI P.B.

DEF. $S = \gamma([0,1])$ $\quad \gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ REGOLARE E INIETT.

È UNA SEZIONE LOCALE DEL FLUSSO SE

$f(x)$ NON È MAI TANGENTE AD S, PER $x \in S$



LEMMA S SEZIONE LOCALE, $x(t)$ SOL.,

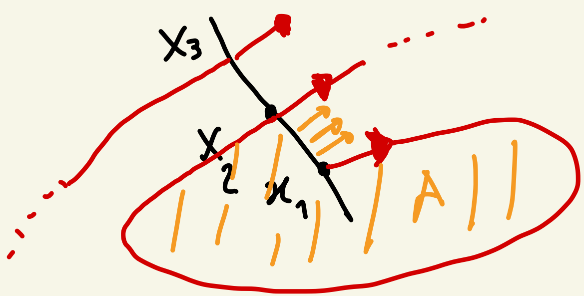
$x_i = x(t_i) \in S$ CON $t_i < t_{i+1}$ $i \in \{1, \dots N\}$

$\Rightarrow$ x_i È UNA SUCCESSIONE

MONOTONA IN S,

CIOÈ $\gamma^{-1}(x_i)$ È MONOTONA IN $[0,1]$.

DIM.



$\mathbb{R}^2 \setminus A$ È INVARIANTE

$\Rightarrow$ x_3 NON PUÒ STARE

TRA x_1 E x_2

CONCLUDIAMO LA DIM. DEL TEOREMA

L ω-LIMITE DI $x(t)$, L COMPATTO

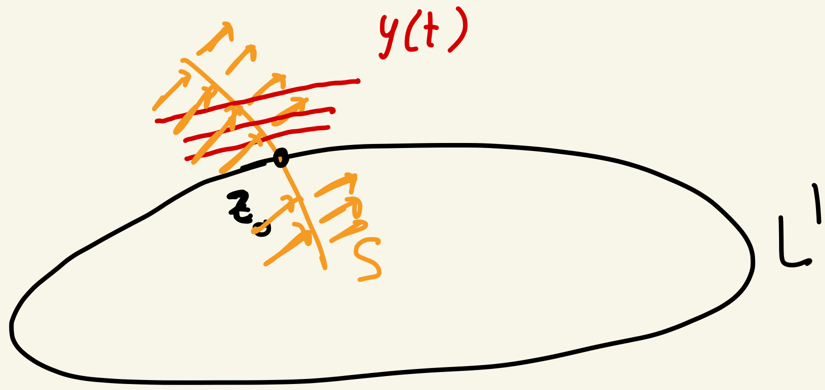
SENZA PUNTI STAZIONARI

$y_0 \in L$ $y(t)$ SOL. DI $y' = f(y)$ CON $y(0) = y_0$

$\Rightarrow y(t) \in L$ (L È INVARIANTE)

SIA $\overline{L} \subseteq L$ L' ω-LIMITE DI $y(t)$, COMPATTO

$z_0 \in L'$ E S SEZIONE LOCALE IN z_0



$z_0 \in L' \Rightarrow \exists\, t_n \to \infty$ T.C. $y(t_n) \to z_0 \in S$

$\Rightarrow \exists\, t'_n \to +\infty$ T.C. $y_n = y(t'_n) \to z_0$, $y_n \in S$

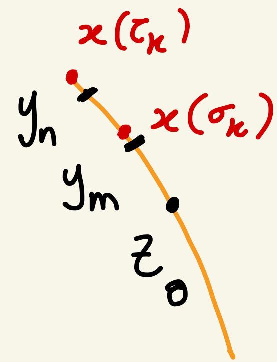
IN PARTICOLARE y_n È MONOTONA SU S

PER IL LEMMA

DICO CHE $y_n = z_0 \ \forall n \Rightarrow$

$y(t)$ È UNA SOL. PERIODICA $(L' = \mathrm{Im}\, y(t))$

SUPP. PER ASSURDO



$y_n \neq y_m \qquad y_n, y_m \in L \Rightarrow$

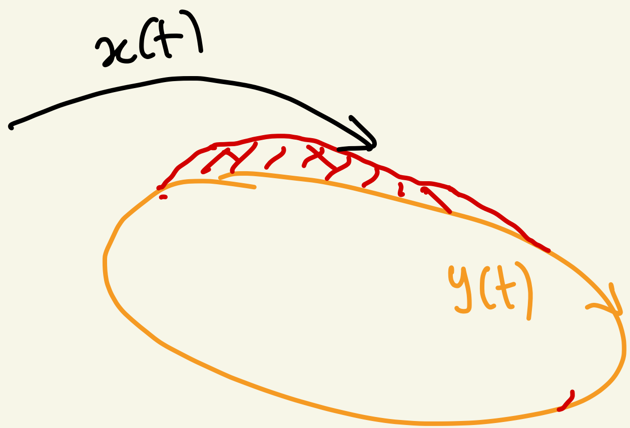
SONO PUNTI DI ACC. DI $x(t)$

$\exists\ \tau_k, \sigma_k$ T.C. $x(\tau_k) \xrightarrow[k]{} y_n, \quad x(\sigma_k) \to y_m$

E POSSO SUPP. $x(\tau_k) \in S, \ x(\sigma_k) \in S \quad \forall k$

$\Rightarrow$ $x(t)$ NON INTERSECA S IN MANIERA MONOTONA, ASSURDO

$\Rightarrow$ $y_n = z_0 \ \forall n$ E $y(t)$ PERIODICA



$L = \omega\text{-LIM DI } x(t)$

$L' = \mathrm{Im}(y(t)) \subseteq L$

$x(t)$ NON INTERSECA $y(t)$ $\Rightarrow$ $L \setminus L'$ STA TUTTO FUORI DA L' O DENTRO L'

SUPP. PER ASSURDO $L \setminus L' \neq \emptyset$

E SIA $z_0 \in L \setminus L'$ E $z(t)$ LA SOL.

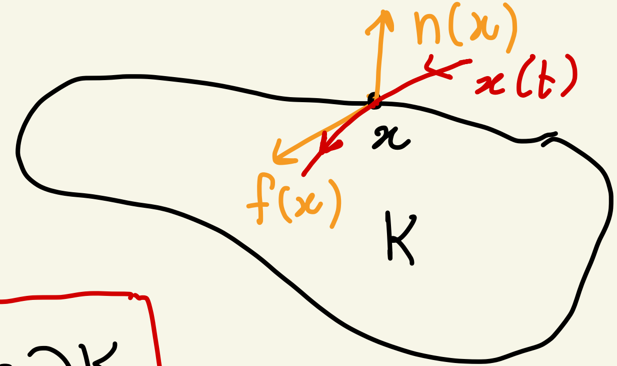
CON $z(0) = z_0$.

$\Rightarrow$ $z(t)$ È UN'ALTRA ORBITA PERIODICA

L DEVE STARE FUORI DA $Im(z(t))$ E CONTENERE $Im(y(t))$

ASSURDO $\Rightarrow$ $L = L' = Im(y(t))$.

OSS: K È INVARIANTE



PER $x' = f(x)$ SE

$$\boxed{f(x) \cdot n(x) < 0 \quad \forall\, x \in \partial K}$$

DOVE $n(x)$ È LA NORMALE ESTERNA

A ∂K IN x