ESERCIZIO 42

$$\omega_1 = \frac{dz}{z^2} \qquad \omega_2 = \frac{dz}{e^z - 1}$$

$$\boxed{\omega_3 = \frac{dz}{\bar{z}}} \qquad \omega_4 = \frac{1}{\bar{z}}\, d\bar{z}$$

QUALI SONO CHIUSE?

- Se f è olomorfa allora $f(z)\,dz$ è chiusa.

$\Rightarrow$ ω_1 è chiusa perché $\frac{1}{z^2}$ è olomorfa

ω_2 è chiusa. perché $\boxed{\frac{1}{e^z-1}}$ è olomorfa.

non è in $\mathbb{C}^*$

- $\omega_3 = \frac{dz}{\bar{z}}$ $\qquad \frac{1}{\bar{z}}$ non è olomorfa.

non è chiusa ovvero localmente esatta. ovvero localmente

$$\omega_3 = dF \quad \text{con} \quad F : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}.$$

$$\parallel$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}\, dx + \frac{\partial F}{\partial y}\, dy$$

$$\omega_3 = \underline{A}\, dx + \underline{B}\, dy \qquad \frac{\partial F}{\partial x} = A \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = B.$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y}$$

$$\boxed{\frac{\partial B}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial y}}.$$

$$\omega_3 = \frac{1}{\bar{z}}\, dz = \frac{1}{\bar{z}}\, dx + \frac{i}{\bar{z}}\, dy$$

$$= \frac{1}{x-iy}\,dx + \frac{i}{x-iy}\,dy$$

$$= \underbrace{\frac{x+iy}{x^2+y^2}}_{A}\,dx + \underbrace{\frac{i(x+iy)}{x^2+y^2}}_{B}\,dy$$

$$\frac{\partial B}{\partial x} = i\,\frac{1}{(x-iy)^2} \qquad \neq$$

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{-i}{(x-iy)^2}$$

non può essere chiusa.

$$\omega_3 = \frac{1}{\bar z}\,dz = dF = \frac{\partial F}{\partial z}\,dz + \frac{\partial F}{\partial \bar z}\,d\bar z$$

$$\frac{\partial F}{\partial \bar z} = 0 \qquad \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{1}{\bar z}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \bar z\,\partial z} = \frac{\partial^2 F}{\partial z\,\partial \bar z} = 0.$$

$$\| $$

$$\frac{\partial}{\partial \bar z}\frac{1}{\bar z} = -\frac{1}{\bar z^2} \neq 0.$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \bar z \partial z} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - i\cancel{\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}} + i\cancel{\frac{\partial^2}{\partial y \partial x}} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar z} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + i\cancel{\frac{\partial}{\partial x \partial y}} - i\cancel{\frac{\partial^2}{\partial y \partial x}} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar z} = \frac{1}{4}\left(\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2\right).$$

$\omega_4 = \frac{1}{\bar z} d\bar z$ $\qquad$ $\omega = \frac{1}{z} dz$ è chiusa.

Localmente $\omega = dF$ $\qquad$ $F = A + iB$ $\qquad$ A, B reali

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy$$

$$= dA + i\, dB. =$$

$$= \frac{\partial A}{\partial x} dx + \frac{\partial A}{\partial y} dy + i\left(\frac{\partial B}{\partial x} dx + \frac{\partial B}{\partial y} dy\right)$$

lo stesso conto me con $-B$ al posto di B

$$d\bar F = \frac{\partial A}{\partial x} dx + \frac{\partial A}{\partial y} dy - i\left(\frac{\partial B}{\partial x} dx + \frac{\partial B}{\partial y} dy\right)$$

$$d(\bar F) = \overline{dF}$$

$$\boxed{d\bar F_p [u] = \overline{dF_p(u)}}.$$

in general se ω è una 1-forma a coeff. complessi ha senso

$$\overline{\omega_p} \qquad \overline{\omega_p}[u] := \overline{\omega_p[u]}$$

$$d\bar F = \overline{dF}$$

Se Ritorno all' esp e se $dF = \frac{1}{z}\, dz$

$$d\bar{F} = \overline{dF} = \overline{\frac{1}{z}\, dz} = \frac{1}{\bar{z}}\, d\bar{z}.$$

QUALI SONO ESATTE $\qquad \omega = dF$ globalmente

- ω_3 NON È CHIUSA $\Rightarrow$ NON ESATTA
- $\omega_1 = \frac{1}{z^2}\, dz$. $\qquad F = -\frac{1}{z} \qquad dF = \frac{1}{z^2}\, dz$.
- ω_4 NON È ESATTA $\qquad \omega_4 = \frac{1}{\bar{z}}\, d\bar{z}$

$\omega = \frac{1}{z}\, dz$ NON È ESATTA.

Se $\omega_4 = dF \Rightarrow d\bar{F} = \frac{1}{z}\, dz$

ω_4 esatta $\Rightarrow \frac{1}{z}\, dz$ esatta

ma sappiamo che non è vero.

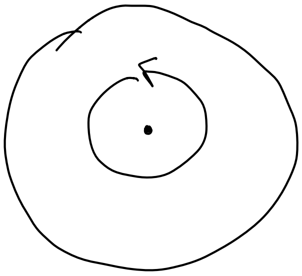
- ω_2 è esatta $\qquad \omega_2 = \frac{1}{e^z - 1}\, dz$.

Ricordiamo che ω chiusa è esatta se

$$\int_\gamma \omega = 0 \qquad \forall \text{ cammino chiuso } \gamma.$$

ω_2 è esatta in $D^* = \{z : |z| < \pi\} \setminus \{0\}$.

ω_2 su D^* è ben definita.



A MENO DI OMOTOPIA LIBERA I LACCI SONO PARAMETRIZZATI DA $\mathbb{Z}$. e sono tutti della forma

$n \in \mathbb{Z}$.

$$\gamma_n(t) = e^{2\pi i n t}. \qquad \gamma_n : I \longrightarrow D^*$$

$$\int_{\gamma_n} \omega = n \boxed{\int_{\gamma_1} \omega}$$

$$\int_{\gamma_1} \frac{1}{e^z - 1}\, dz = \qquad \frac{1}{e^z-1} \sim \frac{1}{z}$$

DIMOSTRO

$$\boxed{\int_{\gamma_1} \left(\frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{z} \right) dz = 0}$$

OVVERO

$$\int_{\gamma_1} \frac{1}{e^z - 1}\, dz = \int_{\gamma_1} \frac{1}{z}\, dz \neq 0.$$

$$\frac{1}{e^z-1} - \frac{1}{z} = \frac{z - e^z + 1}{z(e^z - 1)} = g(z)$$

g è olomorfa in D^*

g si estende in modo continuo a tutto D.

esiste $\lim_{z \to 0} \frac{z - (e^z + 1}{z(e^z - 1)} =$

- $$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \cdots$$

$$e^{x+iy} = \underline{e^x} \left(\cos y + i \sin y \right) =$$

$$= \left(\sum \frac{x^n}{n!} \right) \underbrace{\left(\underline{\sum_{n \text{ pari}} \pm \frac{y^n}{n!}} + i \sum_{n \text{ dispari}} \pm \left(\frac{y^n}{n!} \right) \right)}$$

$$\boxed{e^z = \left(\sum \frac{x^n}{n!} \right) \underbrace{\left(\sum_n \frac{(iy)^n}{n!} \right)}}$$

$$\left(1 - y^2 \frac{1}{2} + \frac{y^4}{4!} \cdots + iy - \frac{iy^3}{3!} + \frac{iy^5}{5!} \cdots \right)$$

$$\frac{(iy)^n}{n!} \qquad 1 + iy - \frac{y^2}{2} - i\frac{y^3}{3!} \cdots$$

$$e^z = \sum_{n,m} \frac{x^n}{n!} \frac{(iy)^m}{m!} =$$

$$= \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{\substack{n,m \\ n+m=N}} \frac{x^n}{n!} \frac{(iy)^m}{m!} =$$

$$= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \boxed{\sum_{n+m=N} \frac{N!}{n!\, m!} x^n (iy)^m}$$

$$\boxed{e^z = \sum^{\infty} \frac{z^N}{N!}}$$

$N=0$

DA QUESTA ESPRESSIONE RICAVATE CHE

$$g(z) = -\frac{e^z - 1 - z}{z(e^z - 1)} =$$

$$= -\frac{\sum_{n\geq 2} z^n/n!}{z \cdot \sum_{n\geq 1} z^n/n!} =$$

$$= -\frac{\cancel{z^2}}{\cancel{z^2}} \frac{\sum_{n\geq 2} \frac{z^{n-2}}{n!}}{\sum_{n\geq 0} \frac{z^{n-1}}{n!}} =$$

quindi g è continua in tutto D.

g è olomorfa in D^*

g " " continua in D

$\tilde{\omega} = \omega_2 - \frac{1}{z}dz = \underline{g(z)}\, dz$ è chiusa.

e D semplicemente connesso. $\int_{\gamma_1} \tilde{\omega} = 0$.

QUINDI

$$\int_{\gamma_1} \tilde{\omega} = 0 \qquad \int_{\gamma_1} \omega_2 - \frac{1}{z}\, dz = 0$$

ovvero $\int_{\gamma_1} \omega_2 = \boxed{\int_{\gamma_1} \frac{1}{z}\, dz \neq 0.}$

$$\boxed{\frac{1}{e^z - 1} \approx \frac{1}{z}}$$

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_0^{2\pi} \underbrace{g(\vartheta)}\, d\vartheta$$

$$\int_a^b f(t)\, dt \qquad f = g + ih$$

$$\underline{\underline{\int g\, dt}} + i \underline{\underline{\int h\, dt}}$$

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_{a_1}^{b_1} \downarrow dx + \int_{a_2}^{b_2} \downarrow dy.$$

$dx + i\,dy$

$dz\ (\gamma')$

$\dot{\gamma}$

$\boxed{\text{SERIE DI POTENZE}}$

TEOREMA

Se $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ convergente in $B(0, R)$ è olomorfa e

$$f(z) = \underbrace{\sum_{n=1} n a_n z^{n-1}}$$ che

pure è una serie convergente in $B(0,R)$

<u>dim</u>

OSSERVAZIONE $\qquad g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$

è una serie convergente in $B(0,R)$.

IL SUO RAGGIO DI CONVERGENZA È $1/$

$$\limsup_n \sqrt[n]{n|a_n|} = \limsup_n \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{\sqrt[n]{n}} \sqrt[n]{|a_n|} =$$

$$= \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}$$

quindi il raggio di convergenza della serie f e della serie g è lo stesso, in particolare g converge in $B(0,R)$

VOGLIO DI MOSTRARE

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(w+\varepsilon) - f(w)}{\varepsilon} = \underline{\underline{g(w)}}$$

$\varepsilon \in \mathbb{C}$.

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \boxed{\frac{f(w+\varepsilon) - f(w)}{\varepsilon} - g(w)} = 0.$$

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n \underbrace{(w+\varepsilon)}^{n} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n}{} - \sum n a_n w^{n-1} =$$

$$\varepsilon \qquad a_n w^n$$

$$= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{\boxed{i=0}}^{n} \binom{n}{i} \varepsilon^i w^{n-i} - \underline{\sum a_n w^n}}{\varepsilon} - \sum a_n \overset{n}{\downarrow} w^{n-1}$$

$$= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{\underline{i=1}}^{n} \binom{n}{i} \varepsilon^i w^{n-i}}{\varepsilon} - \sum a_n \overset{n}{\downarrow} w^{n-1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \varepsilon^{i-1} w^{n-i} - \underline{\sum n a_n w^{n-1}}$$

$$i=1 \qquad a_n \binom{n}{1} \varepsilon^0 w^{n-1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{\underline{\underline{i=2}}}^{n} \binom{n}{i} \varepsilon^{i-1} w^{n-i}$$

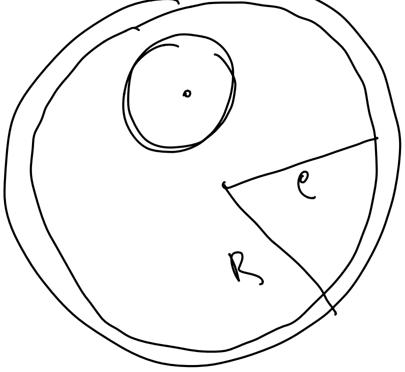
$$= \underbrace{\varepsilon}_{\downarrow\, 0} \underbrace{\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[\sum_{i=2}^{n} \binom{n}{i} \underline{\varepsilon^{i-2}} \underline{w^{n-i}}\right]}}_{\downarrow\ \text{VOGLIAMO CONTROLLARE QUESTO}}$$

$|w| < R$ PER IPOTESI $w \in B(0, R)$ aperto

ESISTE $|w| < \rho < R$

e posso avere anche $|\varepsilon| < \rho - |w|$

ovvero $|w| + |\varepsilon| < \rho < R$.



<u>RICAVO</u>

$$\left|\sum e_n \sum_{i=2}^{n} \binom{n}{i} \varepsilon^{i-2} w^{n-i}\right| \le$$

$$\le \sum |e_n| \underbrace{\sum_{i=2}^{n} \binom{n}{i} |\varepsilon|^{i-2} |w|^{n-i}}$$

$$\le \sum |e_n| \; C \, n^2 \rho^{n-2}$$

$$\sum_{i=2}^{n} \binom{n}{i} |\varepsilon|^{i-2} |w|^{n-i} \le$$ lo stimo

con $\le \boxed{n^2 \rho^{n-2}}$

$$\le \sum |e_n| n^2 \rho^{n-2} =$$

$$= \boxed{\frac{1}{\rho^2}\boxed{\sum |e_n| n^2 \rho^n}} = C_1$$

$\sum |e_n| n^2 \rho^n$ è convergente per ρ.

<u>$\sum e_n n^2 z^n$</u> ha lo stesso raggio di convergenza di <u>$\sum e_n n z^n$</u> ovvero di <u>$\sum e_n z^n$</u>

$$\left| \frac{f(w+\varepsilon) - f(w)}{\;} - g(w) \right| \le |\varepsilon| \, C_1$$

per $\varepsilon \to 0$ abbo $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f(w+\varepsilon)-f(w)}{\varepsilon} - g(w) = 0$

come volevamo.

$\boxed{\displaystyle\sum_{i=2}^{n} \binom{n}{i} |\varepsilon|^{i-2} |w|^{n-i} \leq}$ lo stimo

con $\leq \boxed{C\, n^2 e^{n-2}}$

$$\sum_{i=2}^{n} \binom{n}{i} |\varepsilon|^{i-2} |w|^{n-i} \leq$$

$$\boxed{\binom{n}{i} \leq \binom{n-2}{i-2} n^2} \quad (*) \qquad \frac{n(n-1)}{i(i-1)}$$

$$\frac{n \cdots n-i+1}{i!} \leq n(n-1)\binom{n-2}{i-2} \leq n^2 \binom{n-2}{i-2}$$

$$\leq \sum_{i=2}^{n} n^2 \binom{n-2}{i-2} |\varepsilon|^{i-2} |w|^{n-i} = \qquad j = i-2$$

$$= n^2 \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} |\varepsilon|^{j} |w|^{n-2-j} =$$

$$= n^2 (|\varepsilon| + |w|)^{n-2} \leq n^2 e^{n-2}$$

#

COROLLARIO

Se f è analitica allora f è olomorfa.

<u>dim</u> $f : U \to \mathbb{C}$

Se f è analitica $\underline{\underline{z_0}} \in U$

Allora in un intorno di z_0 la f

si ~~scrive~~ $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, (z - z_0)^n$

Per il teorema precedente $f(z)$ è olomorfa #

<u>COROLLARIO 2</u> (unicità della rapp. in serie di potenze).

Sia $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \underline{a_n} \, z^n$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \underline{b_n} \, z^n$

in $B(0, R)$.

Allora $a_n = b_n \quad \forall n$.

<u>dim</u>

$f(0) = a_0$

$f(0) = b_0$ $\Rightarrow a_0 = b_0$

$f'(z) = \sum_{1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \qquad f'(0) = a_1$

$\Rightarrow a_1 = b_1$

∞

$$f'(z) = \sum_{1} n\, b_n z^{n-1} \qquad f'(0) = b_1$$

$$f^{(n)}(0) = n!\, a_n$$

$$f^{(n)}(0) = n!\, b_n \implies a_n = b_n$$

#