$\boxed{\text{29 apr 2021}}$

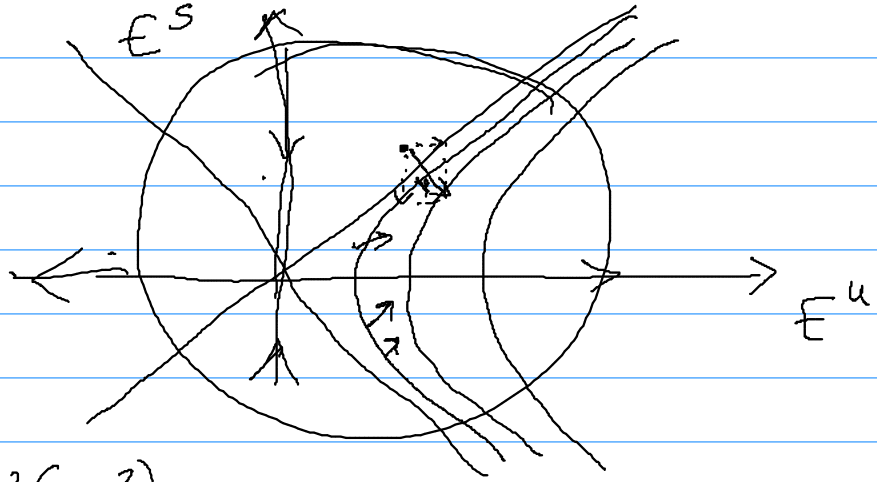
PRECISAZIONE

Instab. (nel metodo di linearizzazione)

$$y' = \underbrace{Ay + \tilde{R}(y)}_{F} \qquad \tilde{R}(y) \to o(|y|)$$

$$A = \mathrm{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n)$$

$$\lambda_1 \le \lambda_2 \le \dots \le \lambda_k < 0 < \lambda_k \le \dots < \lambda_n$$



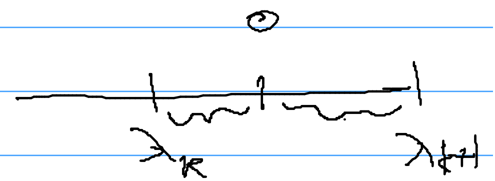
$$\boxed{W(x) \doteq -\frac{1}{2}\sum_{i \le k} x_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i \ge k+1} x_i^2}$$

$$\dot{W}(x) = \nabla W \cdot F =$$

$$= -\sum_{i \le k} \lambda_i x_i^2 + \sum_{i \ge k+1} \lambda_i x_i^2 + \nabla W \cdot \tilde{R} \to o(|x|^2)$$

$$\ge \left(\mu + \frac{o(x^2)}{x^2}\right)|x|^2 \ge \frac{\mu}{2}|x|^2 > 0$$

$\exists \delta > 0 \qquad 0 < |x| < \delta$



$$\mu \doteq \min_{1 \le i \le n} |\lambda_i|$$

$$\begin{cases} Y' = A(t)\cdot Y \\ Y(0) = Id \end{cases}$$

$A \in C(\mathbb{R}, M(n\times n))$

${}^T A(t) + A(t) = 0$

$A(t)$ antisimm $\forall t$

Y soluz. matriciale di (le colonne Y_i sono sol dell' eq $\begin{cases} y' = Ay \\ y(0) = e_i \end{cases}$)

Verificare che ${}^tY(t)\, Y(t) = I$ ($\Leftrightarrow Y(t) \in SO(n)\ \forall t$)

$$\frac{d}{dt}\left({}^TY(t)\; Y(t)\right) = \left({}^TY'(t)\, Y(t) + {}^TY(t)\, Y'(t)\right)$$

$$= \left({}^TY(t)\, {}^TA(t)\, Y(t) + {}^TY(t)\, A(t)\, Y(t)\right) = {}^TY(t)\underbrace{\left({}^TA(t) + A(t)\right)}_{0}\, {}^TY(t) = 0$$

$$ {}^tY(t)\,Y(t) = {}^tY(0)\,Y(0) = I $$

Oss $\det(Y(t)) = 1$ perché $|\det(Y(t))| = 1$ $\quad \det(Y(0)) = 1$

per continuità della funz. determinante e di $Y(t)$

Es 2

$$ \begin{cases} y_1' + 2y_2 = \cos t \\ y_2' - 2y_1 = \sin t \end{cases} $$

$$ y' = Ay + b(t) $$

$$ A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} $$

$$ b(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} $$

$$ y(t) = e^{tA}\int_0^t e^{-sA}\, b(s)\, ds + e^{tA}\cdot \xi $$

(con $\xi = y(0)$)

$$ e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos 2t & -\sin 2t \\ \sin 2t & \cos 2t \end{pmatrix} $$

visto volta scorsa

$$e^{-tA} b(t) = \begin{pmatrix} \cos 2t & +\sin 2t \\ -\sin 2t & \cos 2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\cos 2t \cos t} + \boxed{\sin 2t \sin t} \\ -\sin 2t \cos t + \cos 2t \sin t \end{pmatrix}$$

$$t = 2t - t$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\cancel{3}t) \\ -\sin(\cancel{3}t) \end{pmatrix}$$

$$\int_0^t e^{-sA} b(s)\,ds = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) - 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{tA} \int_0^t e^{-sA} b(s)\,ds = \begin{pmatrix} \cos 2t & -\sin 2t \\ \sin 2t & \cos 2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2t \sin t - \sin 2t (\cos t - 1) \\ \sin 2t \sin t + \cos(2t)(\cos t - 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin t + \sin 2t \\ \cos t - \cos 2t \end{pmatrix}$$

sol particolare del sist. non omog

$$e^{tA}\xi = \begin{pmatrix} \cos 2t & -\sin 2t \\ \sin 2t & \cos 2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 \cos 2t - \xi_2 \sin 2t \\ \xi_1 \sin 2t + \xi_2 \cos 2t \end{pmatrix}$$

sol sist. omogeneo

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad y' = Ay \quad (*)$$

- Discutere la stabilità dell'origine
- scrivere la sol generale di $(*)$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x' = ax + by & (1) \\ y' = cx + dy & (2) \end{cases}$$

può essere risolti riducendosi ad un'eq del II° ordine

$x(0) = x_0$
$y(0) = y_0$

Derivo (1) $\quad x'' = ax' + by' \overset{(2)}{=} ax' + bcx + dby \overset{(1)}{=} ax' + bcx + dx' - adx$

$$x'' - \underbrace{(a+d)}_{tr A} x' + \underbrace{(ad-bc)}_{\det A} x = 0$$

Con calcoli analoghi si ottiene che $y'' - (tr\, A) y' + (\det A) y = 0$

Siano u_1, u_2 sol di $u'' - (tr A) u' + (\det A) u = 0$
lin indip

$$\begin{cases} x = c_1 u_1 + c_2 u_2 \\ y = d_1 u_1 + d_2 u_2 \end{cases} \qquad \begin{aligned} x(0) &= x_0 \\ y(0) &= y_0 \end{aligned} \qquad \boxed{\begin{aligned} x'(0) &= a x_0 + b y_0 \\ y'(0) &= c x_0 + d y_0 \end{aligned}}$$

OSS: lo stesso metodo per eq non omogenee

es. provare a risolvere ES 2 riducendosi alla sol di due eq del I° ordine non omogenee

$$\begin{cases} x' = ax + by + f(t) \\ y' = cx + dy + g(t) \end{cases}$$

Es: si y soluzione massimale $y'' = f(y)$ con $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lip.

(1) mostrare che $y \in C^2(\mathbb{R})$ ← esist. globale

(2) mostrare che, se $y \not\equiv 0$ allora $Z = \{t : y(t) = 0\}$ non ha punti di accumulazione (al finito)

OSS: $y'' = -y$ ha come sol° $\sin t$ $Z = \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$

$I = [a,b]$

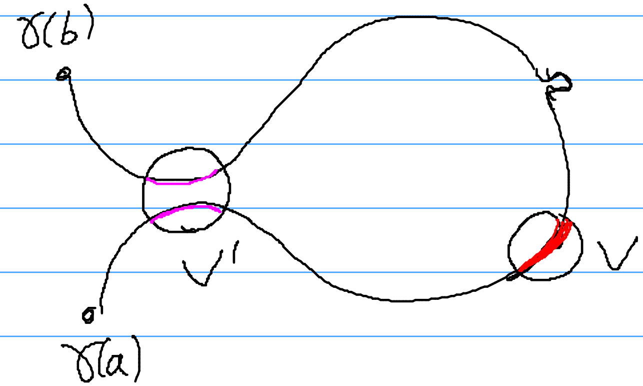
$\gamma \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ iniettiva $\quad |\gamma'(t)| \neq 0 \quad \forall t$

Allora $H^1(\text{supp}\,\gamma) \underset{(\le)}{=} \int_I |\gamma'(t)|\,dt$ $\qquad \text{supp}\,\gamma = \gamma(I)$

S.P.G. posso supporre $|\gamma'(t)| = 1 \rightsquigarrow H^1(\text{supp}\,\gamma) = |I| = H^1(I)$

(≤) $\gamma : I \longrightarrow \gamma(I)$ è 1-Lip. $\Rightarrow H^1(\gamma(I)) \le 1 \cdot H^1(I)$ $\quad (*)$

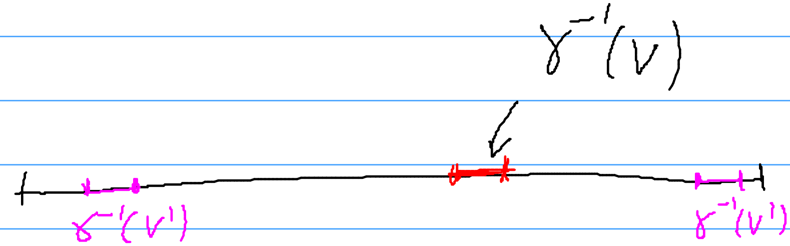
(≥) $\boxed{H^1(I) \le H^1(\gamma(I))}$



$\phi(s,t)$ è est. per cont ponendo $\phi(t,t) = 1$

$\phi(s,t) > 0 \quad (\text{inj}\ \gamma)$

$$\mu \doteq \inf_{\substack{(s,t)\in I^2 \\ s \neq t}} \overbrace{\left|\frac{\gamma(s)-\gamma(t)}{s-t}\right|}^{\phi(s,t)}$$



$\mu > 0 \Leftarrow$ è minimo di funz. continua su un compatto

$\boxed{|\gamma(s)-\gamma(t)| \ge \mu|s-t| \quad \text{con } \mu > 0}$

fisso $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$

@ γ' è U.C. $\Rightarrow \exists\, \omega(\varepsilon) : |t_1 - t_2| < \omega(\varepsilon) \Rightarrow |\gamma'(t_1) - \gamma'(t_2)| < \varepsilon$

fisso $\delta < \mu \cdot \omega(\varepsilon)$

se $V \subseteq \mathbb{R}^n$, $\operatorname{diam}(V) < \delta \Rightarrow (1-\varepsilon)\operatorname{diam}(\gamma^{-1}(V)) \leq \operatorname{diam}(V)$ @

$\boxed{\text{dim @}}$ se $\gamma^{-1}(V) = \phi$ non c'è nulla da dim

$t_1, t_2 \in \gamma^{-1}$

$$\delta \geq |\gamma(t_1) - \gamma(t_2)| \geq \mu|t_1 - t_2| \Rightarrow |t_1 - t_2| < \omega(\varepsilon)$$

$\mu \cdot \omega(\varepsilon)$ ''

$$\delta > \operatorname{diam}(V) \geq |\gamma(t_1) - \gamma(t_2)| = \left|\int_{t_1}^{t_2} \gamma'(s)\, ds\right| = \left|\int_{t_1}^{t_2} \gamma'(t_1)\, ds + \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{\gamma'(s) - \gamma'(t_1)}_{|\gamma'(s) - \gamma'(t_1)| < \varepsilon}\, ds\right| \geq$$

$$\geq \left|\int_{t_1}^{t_2} \gamma'(t_1)\, ds\right| - \left|\int_{t_1}^{t_2} \gamma'(s) - \gamma'(t_1)\, ds\right| \geq |t_2 - t_1| - \varepsilon|t_2 - t_1| = (1-\varepsilon)|t_2 - t_1|$$

$$\operatorname{diam}(V) \geq (1-\varepsilon)\operatorname{diam}(\gamma^{-1}(V))$$

se $\{V_i\}$ è un δ-ric di $\gamma(I)$

$\{\gamma^{-1}(V_i)\}$ è un 2δ-ric. di I

$$(1-\varepsilon)H^1_{2\delta}(I) \leq (1-\varepsilon)\sum \operatorname{diam}(\gamma^{-1}(V_i)) \leq \sum \operatorname{diam}(V_i)$$

$$(1-\varepsilon)H^1_{2\delta}(I) \leq H^1_\delta(\gamma(I)) \qquad \delta \to 0$$

$$(1-\varepsilon)H^1(I) \leq H^1(\gamma(I)) \qquad \text{dato che } \varepsilon \text{ è arbitrario}$$

$$H^1(I) \leq H^1(\gamma(I))$$

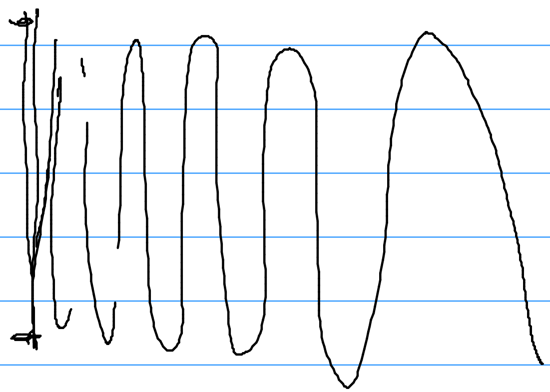
Es: Se $S \subseteq \mathbb{R}^n$ è una sottovarietà compatta allora $\exists\, \delta > 0$ tale che, posto $N_\varepsilon(S) \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, S) < \varepsilon\}$,

$\forall\, p \in N_\varepsilon(S)$ $\exists!\, \bar{p} \in S$ t.c. $d(p, \bar{p}) = \min_{\xi \in S} d(p, \xi)$

Es: $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Se $H^1(A)=0 \Rightarrow A$ è totalmente sconnesso

Se $x \neq y$ allora x e y appartengono a due diverse comp. connesse di A

$\boxed{\text{Dire se vale il viceversa per } A \subseteq \mathbb{R}}$



connesso
non connesso per archi