× $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ $\quad az+b = \dfrac{az+b}{0\cdot z+1}$

$\mathrm{Aut}(\Delta)$ $\quad \dfrac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}$ $\quad \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in SU(1,1)$

× $\mathrm{Aut}(\mathcal{H})$ $\quad \boxed{\dfrac{az+b}{cz+d}}$ $\quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R})$

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{P}(\mathbb{C}^2)$$

$\mathbb{C} \cong U_0 = \{[z,1] : z \in \mathbb{C}\} = \{[z,w] : w \neq 0\}$

$z \longrightarrow [z,1]$ $\quad \alpha([z,1]) = z$

$\mathbb{C} \cong U_\infty = \{[1,w] : w \in \mathbb{C}\} = \{[z,w] : z \neq 0\}$

$w \longrightarrow [1,w]$ $\quad \beta[1,w] = w$

$U_0 \cap U_\infty = \{[z,1] : z \neq 0\}$

$= \{[1,w] : w \neq 0\}. \quad \cong \mathbb{C}^*$

$$\begin{tikzcd} & U_0 \cap U_\infty \ni p \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ z = \alpha(p) & & w = \beta(p) \end{tikzcd}$$

$z = w^{-1}.$

$\mathbb{C} \xhookrightarrow{\alpha^{-1}} \mathbb{P}^1$ $\quad \mathbb{P}^1 \setminus U_0 = \{[1,0]\} = \{\infty\}.$

VOGLIO DEFINIRE COSA È UNA FUNZIONE

OLOMORFA DA UN APERTO DI $\mathbb{P}^1$ IN $\mathbb{P}^1$.

$$\underline{f : U \longrightarrow \mathbb{P}^1} \qquad U \subset \mathbb{P}^1 \text{ aperto.}$$

- $f$ continua (metto questa condizione solo per semplificarmi la vita)
- $z_0 \in U \qquad f(z_0) = z_1$

voglio dire cosa vuol dire che $f$ è olomorfa in $z_0$ (o in un intorno di $z_0$).

- Se $\underline{z_0} \in U_0 \cong \mathbb{C} \subset \mathbb{P}^1$ e $z_1 \in \underline{U_0} = \mathbb{C} \subset \mathbb{P}^1$
  posso considerare $f|_W : W \longrightarrow U_0$
  con $W$ intorno di $z_0$ tale che $f(W) \subset U_0$.
  $$f|_W : W \longrightarrow \mathbb{C}$$
  e cosa vuol dire olomorfa l'abbiamo già definito.

- Se $\underline{z_0 \in U_0 \cong \mathbb{C} \subset \mathbb{P}^1}$ $\qquad \underbrace{f(z_0) = z_1}\, = \infty \notin U_0$, $\infty \in U_\infty$
  $\underline{1^a \text{ oss}}$ $\exists$ un intorno $W$ di $z_0$ tale che $W \subset U_0 = \mathbb{C}$
  $$f(W) \subset U_\infty \overset{\beta}{\cong} \mathbb{C}$$
  $$[1, 0] \longrightarrow 0$$
  $$\mathbb{C} \supset W \xrightarrow{f|_W} U_\infty \xrightarrow{\beta} \mathbb{C}$$

  Dico che $f$ è olomorfa in $z_0$ (o in $W$) se lo è $\beta \circ f|_W$.

COMMENTO

Sia $f$ come sopra non costante

$$g = \beta \circ f|_W$$

$$z_0 \longrightarrow \infty \longrightarrow 0$$

esiste un intorno $W$ di $z_0$ in cui l'unico zero di $g$ è proprio $z_0$, ovvero $f|_W = \infty$ ha come unica soluzione $z_0$. $f|_{W \setminus z_0} : W \setminus z_0 \longrightarrow U_0 = \mathbb{C}$

[ $\underline{h} = f|_{W \setminus z_0} : \underset{\mathbb{C}}{\underset{\cap}{W \setminus z_0}} \longrightarrow \mathbb{C} = U_0$

e $h$ è olomorfa. ( $\underline{\beta \circ f}$ è olomorfa $h = \dfrac{1}{\boxed{\beta \circ f}} \neq 0$ )

Ci sono tre possibilità

- $h$ è limitata . x NO
- $h$ ha un polo in $z_0$ x
- $h$ ha una singolarità essenziale. x

- $h$ non è limitata perché si può estendere in modo continuo ad una mappa $f : W \longrightarrow \mathbb{P}^1$ $f(z_0) = \infty$.

- $h$ non può avere una sing. essenziale. perché se ha una singolarità essenziale $h(B(z_0, \varepsilon) \setminus z_0)$ è denso in $\mathbb{C}$. È contro il fatto che $h$ si estende in modo continuo e $f : W \longrightarrow \mathbb{P}^1$ con $f(z_0) = \infty$. in particolare se $\varepsilon$ è piccolo $f(B(z_0, \varepsilon)) \subset \overline{\{|z| > 1\}}$ non può essere denso.

- Se $h$ ha un polo

$$h(z) = \frac{k(z)}{(z-z_0)^n} \qquad n \geq 1 \quad h(z_0) \neq 0.$$

$$f(z) = h(z) \quad \text{per } z \neq z_0$$

per $z \neq z_0$

$$\boxed{\beta \circ f = \frac{1}{h(z)}} = \frac{(z-z_0)^n}{k(z)}$$

che è una funzione olomorfa su tutto W perché.

$$\beta \circ f(z_0) = 0$$

ovvero $f(z_0) = \infty$.

$$h : W \setminus z_0 \longrightarrow \mathbb{C} = U_0$$

OVVERO CHE SE $f$ NON È COSTANTE E $z_0 \in \mathbb{C}$ le funzioni olomorfe $f$ tali che $f(z_0) = \infty$ sono come le funzioni olomorfe usuali (non definite in $z_0$) e che hanno un polo in $z_0$.

OVVERO SE $f$ ha un polo in $z_0$ $\frac{1}{f}$ è una funzione olomorfa ben definita in un intorno di $z_0$ e in $z_0$ vale $0$.

$\infty$

- $\underline{z_0 = \infty} \in U$. $\qquad f(z_0) \in \mathbb{P}^1$ $\Big\langle \; \neq \infty$

dico che $f$ è olomorfa all'infinito se lo è la funzione

$$\boxed{f \circ \beta^{-1}}$$

$$z_0 = \infty \in U$$

in particolare $\quad z_0 = \infty \in W = U \cap U_\infty$

$$\begin{tikzcd}
U \cap U_\infty \arrow[rr, leftrightarrow, "\beta"', "\sim"] \arrow[d, "f"'] & & V \quad \text{aperto di } \mathbb{C} \\
\mathbb{P}^1 & &
\end{tikzcd}$$

$\beta(U \cap U_\infty)$

$\infty \longrightarrow 0$

<u>Esempio</u> $\quad \dfrac{1}{z^2+1} \qquad f : \mathbb{C} \setminus \{\pm i\} \longrightarrow \mathbb{C}$

$f$ si estende a una funzione olomorfa $f : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$

ponendo

$$f(i) = f(-i) = \infty$$

$$\text{e} \quad f(\infty) = 0.$$

verifico che sia olomorfa.

verifico che sia olomorfa all'$\infty$.

$$f \circ \beta^{-1}$$

$$z = w^{-1}$$

$$\mathbb{C} \ni w \longrightarrow \underset{U_\infty}{\overset{}{[1,w]}} \Longrightarrow \underset{U_0}{[z,1]} \longrightarrow f(z) = f\left(\frac{1}{w}\right)$$

$w \neq 0$

$$w = 0 \longrightarrow \infty \xrightarrow{\quad f \quad} \qquad 0$$

$$\frac{1}{\frac{1}{w^2}+1} = \frac{w^2}{1+w^2}$$

$$\boxed{\frac{1}{f\left(\frac{1}{w}\right)}}$$

OSS $\quad \mathrm{Aut}(\mathbb{C}) \ni \varphi$

Abbiamo visto che una tale $\varphi$ si estende ad una fun. olomorfa da $\mathbb{P}^1$ in $\mathbb{P}^1$ $\quad \varphi(\infty) = \infty$.

$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \simeq \underline{\underline{S^2}}$ $\quad$ CON QUESTA "STRUTTURA OLOMORFA" SI CHIAMA LA SFERA DI RIEMANN.

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1) = \{\varphi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1 \text{ big. olomorfe}\}.$$

$g \in GL_2(\mathbb{C})$ agisce su $\mathbb{C}^2$ in modo lineare
$\quad\; SL_2(\mathbb{C})$ $\quad$ " $\quad$ "

questa azione ne induce una sul proiettivo. $v \in \mathbb{C}^2$
$[v] \in \mathbb{P}^1$

$$g \cdot [v] = [gv]$$

in coordinate se $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ e $\boxed{v = \begin{bmatrix} z \\ 1 \end{bmatrix}}$

$$g[v] = \begin{bmatrix} az+b \\ cz+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{az+b}{cz+d} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

è ben def. se $cz+d \neq 0$.

Se $cz+d=0$. $\quad g[v] = [gv] = \begin{bmatrix} az+b \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \infty$

$$g \underset{\mathbb{C} = U_0}{\underset{\cap}{z}} = \boxed{\frac{az+b}{cz+d}}$$

con l'intesa che se $cz+d=0$ allora $gz = \infty$.

Se $z = \infty$ ovvero se $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$[gv] = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} \qquad \frac{az+b}{cz+d} \qquad \underset{z=\infty}{\longrightarrow}\ \frac{a}{c}$$

## OSSERVAZIONE

$\forall g \in GL_2(\mathbb{C})$ la trasf. $\boxed{[v] \longrightarrow [gv]}$

definisce un automorfismo di $\mathbb{P}^1$.

$\times \quad GL_2(\mathbb{C}) \xrightarrow{\Phi} Aut(\mathbb{P}^1)$

$\times \quad SL_2(\mathbb{C}) \xrightarrow{\Psi} Aut(\mathbb{P}^1)$

$$\begin{aligned} Ker\ \phi &= \{g : [gv] = v\} \\ &= \{g : gv \in \mathbb{C}v \quad \forall v \in \mathbb{C}^2\}. \\ &= \{\lambda Id \text{ con } \lambda \neq 0\}. \end{aligned}$$

$\otimes \quad GL_2(\mathbb{C}) / \mathbb{C}^* Id \xhookrightarrow{\Phi} Aut(\mathbb{P}^1)$

$\otimes \quad SL_2(\mathbb{C}) / \pm Id \xhookrightarrow{\Psi} Aut(\mathbb{P}^1)$

$Im\ \Phi = Im\ \Psi.$

se $g \in GL_2(\mathbb{C})$ $\qquad \det g = \alpha \neq 0$

$\alpha = \beta^2$ con $\beta \neq 0 \in \mathbb{C}.$

$h = \frac{1}{\beta} g = \left(\frac{1}{\beta} Id\right) \cdot g \qquad \det h = 1$

$[hv] = \left[\frac{1}{\beta} g(v)\right] = [gv].$

$\phi(g) = \Psi(h).$

TEOREMA

$\Phi$ è surgettiva ovvero $\operatorname{Aut}(\mathbb{P}^1) = PGL_2(\mathbb{C}) = GL_2(\mathbb{C}) / \mathbb{C}^* I$

$= PSL_2(\mathbb{C}) = SL_2(\mathbb{C}) / \pm 1$

dim

1ª OSS $GL_2(\mathbb{C})$ agisce transitivamente su $\mathbb{P}^1$

ovvero se $L$ e $M$ sono due rette in $\mathbb{C}^2$

$\exists\ g \in GL_2(\mathbb{C})$ tale che $g(L) = M$.

(ovvio)

Sia $\varphi \in \operatorname{Aut}(\mathbb{P}^1)$ e se $\varphi(\infty) = P \in \mathbb{P}^1$

$\exists\ g \in GL_2(\mathbb{C})$ tale che $gP = \infty$

$\psi = \Phi(g) \circ \varphi : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$ big olomorfa

$\psi(\infty) = \infty$.

e $\psi_0 = \psi|_{U_0}$ è $U_0 = \mathbb{C} \longrightarrow U_0 = \mathbb{C}$

$U_0 = \mathbb{C}$ big. olomorfa.

quindi $\psi_0(z) = az + b \ \forall z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{cases} \psi(z) = az+b & \forall z \in \mathbb{C} \\ \psi(\infty) = \infty \end{cases}$$

$\psi = \Phi(h)$ con $h = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\phi(g) \circ \varphi = \phi(h)$$

OVVIO $\underline{\underline{\varphi}} = \underline{\underline{\Phi(g^{-1} \cdot h)}}$

#

IL GRUPPO $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1) = PGL_2(\mathbb{C}) = PSL_2(\mathbb{C})$.

SI CHIAMA IL GRUPPO DELLE TRASFORMAZIONI DI MOEBIUS.

$$\boxed{z \longrightarrow a z} \qquad \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \frac{az}{1}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{a} & 0 \\ 0 & \sqrt{a}^{-1} \end{pmatrix} \in SL_2( \qquad \frac{\sqrt{a}\, z}{\sqrt{a}^{-1}}$$

IERI AVEVAMO LASCIATO A METÀ IL CONTO

CHE $\mathrm{Aut}(\mathcal{H}) = SL_2(\mathbb{R})/\{\pm 1\}$

$$\mathcal{H} \xrightarrow{\sim\ \varphi} \Delta \qquad \mathrm{Aut}\,\Delta.$$

$$z \longrightarrow \frac{z-i}{z+i} \qquad i \longrightarrow 0$$

$$\Delta \xrightarrow{\sim\ \varphi^{-1}} \mathcal{H} \qquad 0 \longrightarrow i$$

$$z \longrightarrow \frac{z+1}{iz-i}$$

$$\boxed{\mathrm{Aut}\,\mathcal{H} = \varphi^{-1} \circ \mathrm{Aut}\,\Delta \circ \varphi} \ .$$

DIMOSTRIAMO CHE $\quad \mathrm{Aut}\,\mathcal{H} = SL_2(\mathbb{R}) / \pm Id. = \underline{PSL_2(\mathbb{R})}$

$\rightarrow$ $PSL_2(\mathbb{R})$ agisce transitivamente su $\mathcal{H}$.

$$\forall z \in \mathcal{H} \quad \exists g \in SL_2(\mathbb{R}) \ : \quad g i = z.$$

$$z = x + iy \qquad y > 0$$

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \qquad g i = \frac{a i + b}{c i + d}$$

scelgo $\quad c = 0 \qquad \frac{a}{d} = y \qquad \frac{b}{d} = x \qquad \underline{\underline{ad = 1}}.$

$$\underset{\substack{\vee \\ 0}}{\underline{a^2 = y}} \qquad \underline{b = x a^{-1}} \qquad \underline{d = a^{-1}}$$

$\rightarrow$ Basta per vedere che lo stabilizzatore di $i$

è in $PSL_2(\mathbb{R})$.

Per fare questo utilizzo l'isomorfismo con $\Delta$.

$$\mathrm{Stab}_{\mathrm{Aut}(\mathcal{H})}(i) = \varphi^{-1} \circ \boxed{\mathrm{Stab}_{\mathrm{Aut}(\Delta)}\, 0} \circ \varphi$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{i\vartheta} & 0 \\ 0 & e^{-i\vartheta} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\vartheta} & -i e^{i\vartheta} \\ & \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cdots & \cdots \\ i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdots & \cdots \\ e^{-i\vartheta} & +i\, e^{-i\vartheta} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta} & -i\, e^{i\vartheta} + i\, e^{-i\vartheta} \\ i\, e^{i\vartheta} - i\, e^{-i\vartheta} & e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}}{2} & \frac{-i e^{i\vartheta} + i e^{-i\vartheta}}{2} \\ \frac{i e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta}}{2} & \frac{e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R}).$$

CONCLUSIONE

Se $\varphi \in \overline{\mathrm{Aut}(\mathcal{H})}$ $\quad \varphi(i) = z$

$\exists\, g \in SL_2(\mathbb{R})$ tale che $\quad g(z) = i$

$\underline{\Phi(g) \circ \varphi} : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H} \qquad i \longrightarrow i$

$\| \quad \phi(h) \quad h \in SL_2(\mathbb{R}) \Rightarrow h \in SO(2, \mathbb{R}).$

$$\Phi(g) \circ \varphi = \phi(h)$$

$$\varphi = \Phi(g^{-1} h)$$

#

BIRAPPORTO

$P_1 = [v_1] \quad P_2 = [v_2] \quad P_3 = [v_3] \quad P_4 = [v_4]$ distinti.

$$\begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \end{pmatrix} \overset{\lambda\sigma_4}{=} \frac{\det(v_1\, v_3)}{\quad} \cdot \frac{\det(v_2\, v_4)}{\quad}$$

$$\det(v_1\ v_4) \qquad \det(v_2\ v_3)$$

1° questa formula non dipende dalla scelta dei rappresentanti $v_1 \dots v_4$

2° Se $g \in PGL_2$

$$(gP_1\ gP_2\ gP_3\ gP_4) = (P_1\ P_2\ P_3\ P_4)$$

$$\frac{\det(gv_1\ gv_3)}{\det(gv_1\ gv_4)} \quad \frac{\det(gv_2\ gv_4)}{\det(gv_2\ gv_3)}$$

$$\frac{\cancel{\det g}\ \det(v_1\ v_3)}{\cancel{\det g}\ \det(v_1\ v_4)} \quad \text{etc.}$$

3° espressione del birapporto nel caso di vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} z_1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} z_2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} z_3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_4 = \begin{pmatrix} z_4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(P_1\ P_2\ P_3\ P_4) = \frac{\det\begin{pmatrix} z_1 & z_3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} z_1 & z_4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} \quad \dots\dots = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} \cdot \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3}$$

4° $\boxed{\mathbb{C}}\ \mathbb{P}^1 \supset U_0 = \underline{\mathbb{C}} = \mathbb{R}^2$

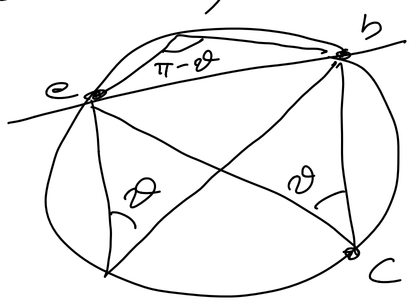
$a, b, c \in \mathbb{R}^2$ distinti non allineati

$\gamma$ è il cerchio passante per $a, b, c$.

$$\gamma = \{ z \in \mathbb{C} : \underline{(z, a, b, c) \in \mathbb{R}} \}.$$

(è un esercizio di geom. euclidea)

$$\overline{\frac{z-b}{z-c} \cdot \frac{a-c}{a-b}} =$$

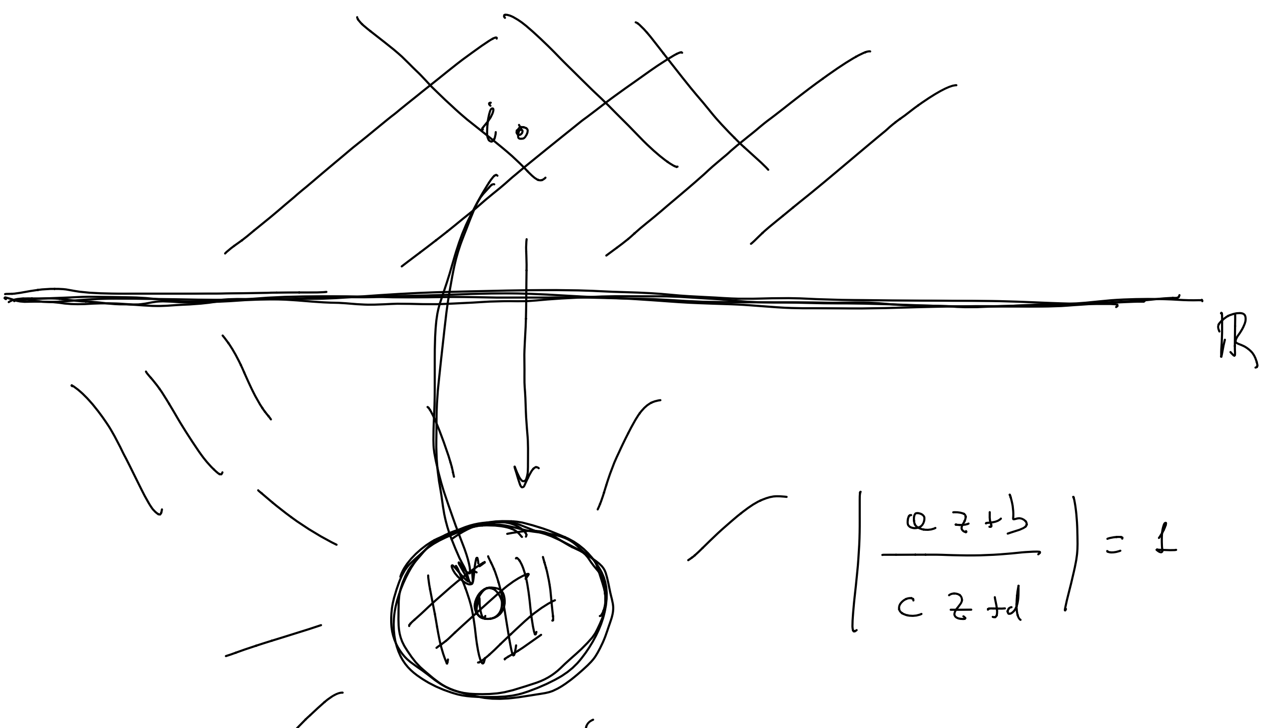



Se $a, b, c$ sono allineati

la retta per $a, b, c$ ha la stessa descrizione.

L'azione di $PGL_2(\mathbb{C})$ porta $\{\text{rette}\} \cup \{\text{cerchi}\}$

in $\{\text{rette}\} \cup \{\text{cerchi}\}$.




$$\left| \frac{az+b}{cz+d} \right| = 1 \quad \text{quando } z \text{ è reale}$$

$$\frac{az+b}{\bar{a}z+\bar{b}} \qquad \frac{z-i}{z+i}$$

$i \to 0$