Corso di Laurea in Matematica
Geometria 2 - I scritto - 11/6/2021

Esercizio 1. Sia π un piano in $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$, e ℓ una retta non contenuta in π. Sia inoltre O un punto di $\mathbb{P}^3(\mathbb{C}) \setminus (\pi \cup \ell)$. Si consideri la funzione $f_O \colon \ell \to \pi$ che manda un punto $P \in \ell$ nell'intersezione della retta $L(P, O)$ con il piano π.

(1) Si mostri che f_O è ben definita, e che è una trasformazione proiettiva.
(2) Supponiamo che $g \colon \ell \to \pi$ sia una trasformazione proiettiva tale che $g(Q) = Q$, dove Q è il punto di intersezione tra ℓ e π. Si mostri che esiste $O \in \mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ tale che $g = f_O$.

Soluzione. (1): Visto che $O \notin \ell$, per $P \in \ell$ la retta $L(P, O)$ è ben definita, e visto che $O \notin \pi$, la retta $L(O, P)$ non è contenuta in π, e dunque l'intersezione $\pi \cap L(O, P)$ consiste di esattamente un punto. Questo mostra che f_O è ben definita.

Per vedere che f_O è una trasformazione proiettiva, scriviamola in coordinate usando un riferimento appropriato. Sia Q l'unico punto in $\ell \cap \pi$, e scegliamo un punto $A \in \ell \setminus \{Q\}$. Scegliamo inoltre $B \in \pi \setminus L(A, O, Q)$, e $C \in \pi \setminus (L(A, O, Q) \cup L(A, O, B) \cup L(B, Q))$. In questo modo $\{A, Q, B, C, O\}$ è un riferimento proiettivo di $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$. Infatti, pensiamo di considerare una quadrupla di punti in questo insieme. Se C è in questa quadrupla, allora vi appartengono anche entrambi A e O, oppure entrambi B e Q. In entrambi i casi, per costruzione il punto C non sta nel piano determinato da A, O (risp. B, Q) e dal terzo punto. Se invece C non è nella quadrupla scelta, per costruzione il punto B non sta in $L(A, O, Q)$.

Nelle coordinate determinate da questo riferimento, il piano π passa per i punti $Q = [0, 1, 0, 0], B = [0, 0, 1, 0], C = [0, 0, 0, 1]$, dunque ha equazione $x_0 = 0$, e la retta ℓ passa per i punti $A = [1, 0, 0, 0], Q = [0, 1, 0, 0]$, dunque ha equazioni $x_2 = x_3 = 0$. Ora preso un punto generico $P = [a, b, 0, 0] \in \ell$ (con $[a, b] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$), la retta $L(A, O)$ è descritta parametricamente da $[\lambda a + \mu, \lambda b + \mu, \mu, \mu]$ con $[\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. L'intersezione con il piano π si ha quando $\lambda a + \mu = 0$, quindi ad esempio $\lambda = 1, \mu = -a$, che da il punto $[0, b - a, -a, -a]$.

Abbiamo verificato che $f_O \colon \ell \to \pi$ manda il punto $[a, b]$ nel punto $[b - a, -a, -a]$, e dunque è la trasformazione proiettiva corrispondente alla trasformazione lineare iniettiva $g \colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^3$ data da $g(a, b) = (b - a, -a, -a)$.

(Soluzione alternativa: sia π' il piano determinato da ℓ e O, e $r = \pi \cap \pi'$, che è una retta, dato che i piani π e π' sono distinti. Chiaramente, visto che per ogni $P \in \ell$ la retta $L(P, O)$ è contenuta in π', la funzione f_O si restringe a una funzione (definita allo stesso modo) $f'_O \colon \ell \to r$ nel piano π', che è la prospettività di centro O, e quindi una trasformazione proiettiva. La funzione f_O è composizione di f'_O e dell'inclusione $r \to \pi$, entrambe trasformazioni proiettive, dunque è essa stessa una trasformazione proiettiva.)

(2): Sia $r \subseteq \pi$ la retta $g(\ell)$ (ricordiamo che trasformazioni proiettive mandano sottospazi proiettivi in sottospazi proiettivi della stessa dimensione), e π' il piano determinato dalle rette ℓ e r (che si intersecano in Q per ipotesi, visto che $g(Q) = Q$). Scegliamo inoltre $A, B \in \ell \setminus \{Q\}$ distinti. Allora le rette $L(A, g(A))$ e $L(B, g(B))$, essendo complanari (sono contenute in π') e distinte (visto che $g(A)$ e $g(B)$ sono distinti da Q) si intersecano in punto di $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ che chiamiamo O. Ora le due trasformazioni proiettive $g \colon \ell \to \pi$ e $f_O \colon \ell \to \pi$ coincidono sul riferimento proiettivo $\{A, B, Q\}$ di ℓ, e dunque, per il teorema fondamentale delle trasformazioni proiettive, sono la stessa funzione.

Esercizio 2. Si consideri l'azione di $\mathbb{Z}$ su $\mathbb{R}^2$ data da

$$n \cdot (x, y) = (x + n, (-1)^n y)$$

per ogni $n \in \mathbb{Z}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, e sia $X = \mathbb{R}^2/\sim$ lo spazio quoziente di $\mathbb{R}^2$ rispetto all'azione descritta.

(1) Si mostri che l'azione è propriamente discontinua.
(2) Si dica se X è compatto.
(3) Si dica se X ammetta rivestimenti il cui spazio totale sia omeomorfo a $S^1 \times \mathbb{R}$.

Soluzione. (1): Per ogni $p \in \mathbb{R}^2$, sia U_p la palla aperta di centro p e raggio $1/2$. Poiché le traslazioni e la riflessione rispetto all'asse delle x sono isometrie del piano, si ha $n \cdot U_p = U_{p+(n,0)}$. Se $(n \cdot U_p) \cap U_p \neq \emptyset$, esiste perciò $q \in (n \cdot U_p) \cap U_p = U_{p+(n,0)} \cap U_p$. Dunque $d(p+(n,0),p) \leqslant d(p+(n,0),q) + d(q,p) < 1/2 + 1/2 < 1$, da cui immediatamente $n = 0$. Ciò dimostra che l'azione è propriamente discontinua.

(2): Per ogni $k \in \mathbb{N}$, sia $U_k = \mathbb{R} \times (-k,k) \subseteq \mathbb{R}^2$. È immediato verificare che $n \cdot U_k = U_k$ per ogni $n, k \in \mathbb{N}$, per cui gli U_k sono aperti saturi di $\mathbb{R}^2$. Se V_k è la proiezione di U_k in X, ne segue che $\{V_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ è un ricoprimento aperto di X da cui non è possibile estrarre un ricoprimento finito.

In alternativa, si può osservare che la funzione $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = y$, passa al quoziente su X definendo una funzione continua e surgettiva $\overline{f}\colon X \to \mathbb{R}$. Poiché $\mathbb{R}$ non è compatto, nemmeno X può esserlo.

(3): Sì, ammette un tale rivestimento. Per (1), la proiezione $\pi\colon \mathbb{R}^2 \to X$ è un rivestimento, e poiché $\mathbb{R}^2$ è semplicemente connesso, π è in effetti un rivestimento universale. Dalla teoria svolta a lezione, sappiamo allora che, se H è un qualsiasi sottogruppo di $\mathbb{Z}$, allora $\mathbb{R}^2/H$ riveste X. Prendiamo $H = 2\mathbb{Z}$. Allora $\mathbb{R}^2/H$ è omeomorfo al quoziente di $\mathbb{R}^2$ rispetto alla relazione di equivalenza $(x,y) \sim (x',y')$ se e solo se $x - x' = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$. La funzione $g\colon \mathbb{R}^2 \to S^1 \times \mathbb{R}$, $g(x,y) = ((\cos \pi x, \sin \pi x), y)$ passa al quoziente definendo una mappa $\overline{g}\colon \mathbb{R}^2/H \to S^1 \times \mathbb{R}$. Per concludere, basta osservare che g è un'identificazione: infatti, è ovviamente continua e surgettiva, ed essendo prodotto di mappe aperte (un rivestimento e l'identità) è aperta.

Esercizio 3. Si considerei l'integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i s t}}{(t-i)(t-2i)} dt$$

dove $s \in \mathbb{R}$.

(1) Si calcoli l'integrale per $s \geqslant 0$;
(2) Si calcoli l'integrale per $s < 0$.

Soluzione: Osserviamo innanzitutto che l'integrale è assolutamente convergente perché il modulo della funzione va a zero come $1/t^2$ per $|t|$ che tende all'infinito.

(1) Studiamo prima il caso di $s \geqslant 0$. Siano $\alpha_R : [-R,R] \longrightarrow \mathbb{C}$ e $\beta_R : [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ le curve definite da

$$\alpha_R(t) = t \qquad \text{e} \qquad \beta_R(t) = Re^{it}$$

e infine sia $\gamma_R = \alpha_R * \beta_R$ la concatenazione dei due cammini. Per $R > 2$, osserviamo che la funzione $f(z) = \frac{e^{2\pi i s z}}{(z-i)(z-2i)}$, nella regione racchiusa dalla curva γ_R, ha due poli semplici, uno in $z = i$ e uno in $z = 2i$. I due residui sono facili da calcolare:

$$Res(f,i) = ie^{-2\pi s} \qquad Res(f,2i) = -ie^{-4\pi s}$$

Per un teorema dimostrato a lezione abbiamo che

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = 2\pi i Res(f,i) + 2\pi i Res(f,2i) = -2\pi\, e^{-2\pi s} + 2\pi\, e^{-4\pi s}.$$

Osserviamo inoltre che

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{2\pi\, i\, s\, t}}{(t-i)(t-2i)} dt + i \int_0^{\pi} \frac{e^{2\pi i s R e^{it}}}{(Re^{it}-i)(Re^{it}-2i)} Re^{it} dt.$$

Dimostriamo che il secondo addendo tende a zero per R che tende all'infinito. Infatti poiché $s \geqslant 0$ e $t \in [0,\pi]$ abbiamo che

$$\left| \frac{e^{2\pi i s R e^{it}}}{(Re^{it}-i)(Re^{it}-2i)} Re^{it} \right| = \frac{R}{|Re^{it}-i| \cdot |Re^{it}-2i|} e^{-2\pi s R \sin t} \leqslant \frac{R}{(R-1)(R-2)}$$

e quindi il modulo del secondo integrale è minore o uguale a $\pi R/(R-1)(R-2)$ e in particolare tende a 0 per R che tende a infinito. Ne ricaviamo che

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i s t}}{(t-i)(t-2i)} dt = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{e^{2\pi i s t}}{(t-i)(t-2i)} dt = -2\pi\, e^{-2\pi s} + 2\pi\, e^{-4\pi s}.$$

(2) Per $s \leqslant 0$ procediamo in modo analogo ma integrando lungo la curva $\tilde{\gamma}_R = \alpha_R * \tilde{\beta}_R$ dove $\tilde{\beta}_R : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ è definita da

$$\tilde{\beta}_R(t) = Re^{-it}.$$

Procediamo esattamente come nel caso precedente, ma in questo caso osserviamo che la funzione f nella regione racchiusa dalla curva $\tilde{\gamma}_R$ non ha poli, quindi

$$\int_{\tilde{\gamma}_R} f(z)dz = 0.$$

Procedendo come prima ricaviamo che l'integrale cercato è uguale a zero.