Newton's method for CARE

$$F(X) = A^*X + XA + Q - XGX$$

$$L_{F,X}(E) = A^*E + EA - EGX - XGE = E(A - GX) + (A - GX)^*E.$$

$$\widehat{L}_{F,X} = (A - GX)^T \otimes I + I \otimes (A - GX)^*.$$

If X_* is the stabilizing solution then $\Lambda(A - GX_*) \subset LHP \implies L_{F,X_*}$ is nonsingular.

Newton's method

For $k = 0, 1, 2, \ldots$

1. Solve $E(A - GX_k) + (A - GX_k)^*E = F(X_k)$ for E;
2. Set $X_{k+1} = X_k - E$.

$$F(X) = A^*X + XA + Q - XGX$$

$$A^*(X+E) + (X+E)A + Q - (X+E)G(X+E) - A^*X - XA - Q + XGX$$

$$= \underbrace{A^*E + EA - EGX - XGE}_{L_{F,X}(E)} + o(\|E\|)$$

$$= E(A-GX) + (A-GX)^*E$$

$$\hat{L}_{F,X} = (A-GX)^T \otimes I + I \otimes (A-GX)^*$$

Se X_* è la soluzione stabilizzante della ARE $F(X)=0$, $A-GX_*$ è stabile e ha autoval. uguali a quelli stabili di $\mathcal{H}$.

$\Rightarrow$ Gli autovel. di

$\mathcal{L}_{F,X_*}$ sono $\lambda_i+\lambda_j$, dove λ_i sono gli autovel. di $A-GX_*$

$\lambda_i+\lambda_j$ ha sempre parte reale <0.

Metodo di Newton:

$X_{k+1}=X_k-E$, dove E risolve $\mathcal{L}_{F,X_k}(E)=F(X_k)$, cioè

$$(A-GX_k)^*E+E(A-GX_k)=\underbrace{Q+A^*X_k+X_kA-X_kGX_k}\qquad (*)$$

(equazione di Lyapunov)

$$(A-GX_k)^* X_k + X_k (A-GX_k) = \underline{A^* X_k + XA - 2X_k G X_k} \quad (**)$$

Sottraggo $(*)$ da $(**)$, e viene

$$(A-GX_k)^* \underbrace{(X_k - E)}_{=X_{k+1}} + \underbrace{(X_k - E)}_{=X_{k+1}} (A-GX_k) = -X_k G X_k - Q \leq 0$$

$$\Downarrow$$

$$-(X_k^*) G X_k \leq 0,$$

ottenuta coniugando G

$\Rightarrow$ Se $A-GX_k$ ha autoval. nel LHP, allora $X_{k+1} \geq 0$.

<u>Remark</u>: se X_* è la stabilizing solution della ARE,

$$(A-GX_*)^* X_* + X_*(A-GX_*) = -Q - X_* G X_*$$

$$\Updownarrow$$

$$A^* X_* - X_* G X_* + X_* A - \cancel{X_* G X_*} = -Q - \cancel{X_* G X_*}$$

Quindi X_* risolve l'eq. di Lyapunov

$$(A-GX_*)^* Z + Z(A-GX_*) = -Q - X_* G X_*$$

e $A-GX_*$ è stabile $\Rightarrow X_* \succcurlyeq 0$.

Newton's method

Note that $\boxed{E(A - GX_k) + (A - GX_k)^* E = F(X_k)}$ is equivalent to

$$\boxed{X_{k+1}(A - GX_k) + (A - GX_k)^* X_{k+1} = -Q - X_k G X_k.}$$

This shows that $A - GX_k$ stable $\implies X_{k+1} \succeq 0$.

Actually, something stronger holds.

Monotonicity of Newton's method

facile, perché è Newton

si parte da 1: $X_0 \succeq X_1$ non sempre vero

Theorem

Suppose X_0 is chosen such that $\Lambda(A - GX_0) \subset LHP$. Then, $X_1 \succeq X_2 \succeq X_3 \succeq \cdots \succeq X_* \succeq 0$. Moreover, $X_k \to X_*$ quadratically.

Proof (sketch) Coupled induction. Set $\boxed{A_k := A - GX_k:}$

$$(X_k - X_{k+1})A_k + A_k^*(X_k - X_{k+1}) = -(X_k - X_{k-1})G(X_k - X_{k-1})$$
$$(X_* - X_{k+1})A_k + A_k^*(X_* - X_{k+1}) = -(X_* - X_k)G(X_* - X_k)$$

hence A_k stable $\implies X_k \succeq X_{k+1} \succeq X_*$.

$$\begin{aligned}&(X_{k+1} - X_*)A_{k+1} + A_{k+1}^*(X_{k+1} - X_*)\\ &\quad = -(X_{k+1} - X_k)G(X_{k+1} - X_k) - (X_{k+1} - X_*)G(X_{k+1} - X_*)\end{aligned}$$

This does not prove immediately that A_{k+1} is stable (because the RHS is not $\prec 0$), but $A_{k+1}v = \lambda v$ with $\operatorname{Re}\lambda \geq 0$ gives

$G\cancel{D}X_{k+1}v = G\cancel{D}X_k v$, hence if $A_k v = \lambda v$.

$A_k := A - GX_k$

A) $\boxed{\text{Se } A_k \text{ è stabile, } X_k \succeq X_{k+1}}$ [per $k \geq 1$]

$$(A-GX_k)^* X_{k+1} + X_{k+1}(A-GX_k) = -\cancel{Q} - X_k G X_k \qquad 1)$$

$$(A-GX_{k-1})^* X_k + X_k(A-GX_{k-1}) = -Q - X_{k-1} G X_{k-1} \qquad 2)$$

$$+X_{k-1}GX_k \qquad + X_kGX_{k-1} \qquad + X_kGX_{k-1} + X_{k-1}GX_k$$

$$-X_kGX_k \qquad - X_kGX_k \qquad - X_kGX_k - X_kGX_k$$

$$(A-GX_k)^* X_k + X_k(A-GX_k) = -\cancel{Q} + X_kGX_{k-1} + X_{k-1}GX_k - 2X_kGX_k - X_{k-1}GX_{k-1} \qquad 3)$$

$\boxed{1-3}$: $$(A-GX_k)^*(X_{k+1}-X_k) + (X_{k+1}-X_k)(A-GX_k) = \underbrace{(X_k - X_{k-1})G(X_k - X_{k-1})}_{\succeq 0}$$

$\Rightarrow X_{k+1} - X_k \preceq 0$

B.) Se A_k stabile, $X_{k+1} \geq X_*$

$$(A-GX_k)^* X_* + X_*(A-GX_k) = \underbrace{A^*X_* + X_*A}\, - X_kGX_* - X_*GX_k$$

$$= \underbrace{X_*GX_* - Q - X_kGX_* - X_*GX_k} \qquad 4)$$

$\boxed{1-4}$: $(A-GX_k)^*(X_{k+1}-X_*) + (X_{k+1}-X_*)(A-GX_k) =$

$$= -\cancel{Q} - X_kGX_k - X_*GX_* + \cancel{Q} + X_kGX_* + X_*GX_k$$

$$= -(X_k - X_*)G(X_k - X_*).$$

$$X_{k+1} - X_* \geq 0$$

c) Se $\underbrace{X_k \geq X_*}_{\text{e } A-GX_{k-1} \text{ stabile}}$, allora $A-GX_k$ è stabile

Sottraggo 1-3 e 1-4:

$$(A-GX_k)^*(X_{k+1}-X_k)+(X_{k+1}-X_k)(A-GX_k) = (X_k-X_{k-1})G(X_k-X_{k-1})$$

$$(A-GX_k)^*(X_{k+1}-X_*)+(X_{k+1}-X_*)(A-GX_k) = -(X_k-X_*)G(X_k-X_*)$$

$$(A-GX_k)^*(X_*-X_k)+(X_*-X_k)(A-GX_k) = (X_k-X_{k+1})G(X_k-X_{k+1}) + (X_k-X_*)G(X_k-X_*)$$

RHS ≥ 0 soluzione ≤ 0 $\overset{?}{\Rightarrow}$ $A-GX_k$ stabile?

no! $2\cdot 0 + 0\cdot(2) = 0$ non implica $2<0$ ...

Dobbiamo dimostrarlo direttamente:

Supponiamo $(A-GX_k)v = \lambda v$, con $\operatorname{Re}\lambda \geq 0$

Moltiplichiamo l'eq. per v^* e v:

$$v^*(A-GX_k)^*(X_*-X_k)v + v^*(X_*-X_k)(A-GX_k)v = v^*(X_k-X_{k-1})G(X_k-X_{k-1})v$$
$$+ v^*(X_k-X_*)G(X_k-X_*)v$$

$$LHS = v^*\bar{\lambda}(X_*-X_k)v + v^*(X_*-X_k)\lambda v = \underbrace{(\bar{\lambda}+\lambda)}_{\geq 0}\underbrace{v^*(X_*-X_k)v}_{\leq 0} \leq 0$$

Ma RHS contiene matrici ≥ 0, quindi dev'essere

$$v^*(X_k-X_{k-1})G(X_k-X_{k-1})v = 0 \qquad G = BR^{-1}B^T,\ R>0$$

$$B^T(X_k-X_{k-1})v = 0$$

$$\Rightarrow G(X_k-X_{k-1})v = 0$$

Ma se $(A-GX_k)v=\lambda v$ e $G(X_k-X_{k-1})v=0$,

allora $(A-GX_{k-1})v=\lambda v$, e già $A-GX_{k-1}$ non era stabile

---

Quindi il metodo di Newton genera una successione limitata $\Rightarrow$ converge a una soluzione di ARE. Ad ogni passo $A-GX_k$ è stabile, quindi $A-GX_\infty$ ha tutti autovalori con $\mathrm{Re}\,\lambda \leq 0$.

(e X_∞ risolve CARE). Ma se X_∞ risolve CARE, gli autoval. di $A-GX_\infty$ sono un sottoinsieme di quelli di $\mathcal{H}$, e non ce ne sono con parte reale $=0$.

Newton: wrap-up

- Use Bass's algorithm to find X_0 such that $A - GX_0$ is stable
- Run Newton iterations till convergence.

Expensive: each iteration requires a Schur form.

One final step of Newton can be used to 'correct' an inaccurate algorithm.

$[\, A X + X A = C$, via back-sub $]$

"iterative refinement"